Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева

УДК 517.518.45 На правах рукописи

БАШИРОВА АНАР НАБИЕВНА

Мультипликаторы кратных рядов Фурье-Хаара

6D060100 – Математика

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Научные консультанты
доктор физико-математических наук,
профессор
Е.Д. Нурсултанов

доктор физико-математических наук,
профессор
М.И. Дьяченко
(Москва)

Республика Казахстан
Нур-Султан, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

В настоящей диссертации использованы ссылки на следующие стандарты:

ГОСО РК 5.04.034-2011. Государственный общеобязательный стандарт образования Республики Казахстан. Послевузовское образование. Докторантура. Основные положения (изменения от 23 августа 2012 г. №1080).

Правила присуждения ученых степеней от 31 марта 2011 г. №127.

ГОСТ 7.32-2001. Межгосударственные стандарты (изменения от 2006 г.)

ГОСТ 7.1-2003. Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Исследование мультипликаторов рядов Фурье - важное направление гармонического анализа. Большой интерес к данному направлению объясняется тем, что мультипликаторы рядов Фурье используются в различных разделах математики и в прикладных задачах, а также наличием нерешенных задач, требующих глубоких исследований. С развитием теории приближений вейвлетами возник интерес к исследованию рядов Фурье-Хаара.

Диссертационная работа посвящена исследованию мультипликаторов рядов Фурье-Хаара в пространствах Лоренца и в анизотропных пространствах Лоренца.

Теория мультипликаторов рядов Фурье имеет своим истоком теорему М. Рисса [1], где показано, что характеристическая функция χ_A, когда A - отрезок из $\mathbb{Z}^n$, является мультипликатором тригонометрических рядов Фурье в пространстве $L_p[0,2\pi)$, т.е.

$$\|S_A(f)\|_{L_p} \leq C\|f\|_{L_p}, \tag{1}$$

где C не зависит от выбора отрезка A из $\mathbb{Z}^n$ и функции f из $L_p(\mathbb{T}^n)$. В общем случае, когда A - произвольное конечное подмножество в $\mathbb{Z}^n$, константа C в (1) будет зависеть существенно от геометрических свойств множества A.

Пусть X, Y - пространства функций, определенных на отрезке $[0,1]$, таких, что $X \hookrightarrow L_1$. Пусть $\{\varphi_k\}$ - полная ортонормированная система. Пусть функции $f \in X$ соответствует ее ряд Фурье по данной системе $\{\varphi_k\}$

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k,$$

где a_k- коэффициенты Фурье функции f по системе $\{\varphi_k\}$. Будем говорить, что последовательность комплексных чисел $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ является мультипликатором рядов Фурье по системе $\{\varphi_k\}$ из пространства X в пространство Y, если для функции $f \in X$ с рядом Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k$$

найдется функция $f_\lambda \in Y$, ряд Фурье которой совпадает с рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k \varphi_k$$

и оператор $\Lambda \mathrm{f} = \mathrm{f}_\lambda$ является ограниченным оператором из X в Y.

Множество $m(X \to Y)$ всех определенных таким образом мультипликаторов является линейным нормированным пространством с нормой

$$\|\lambda\|_{m(X\to Y)} = \|\Lambda\|_{X\to Y}.$$

Для тригонометрических рядов известна фундаментальная теорема Марцинкевича [2]:

Теорема. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\lambda = \{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ - *последовательность вещественных чисел, удовлетворяющих условию*

$$F_0(\lambda) = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\lambda_k - \lambda_{k+1}| + |\lambda_{-k} - \lambda_{-k-1}| \right) + \sup_{m\in\mathbb{Z}} |\lambda_m| < \infty,$$

тогда λ - *мультипликатор в* $L_p[0,2\pi)$ *и*

$$\|\lambda_m\| \le c F_0(\lambda).$$

Дальнейшее развитие теории мультипликаторов тригонометрических рядов Фурье можно найти в работах Лизоркина П.И. [3, 4], Нурсултанова Е.Д. и Тлеухановой Н.Т. [5-7], Смаилова Е.С. и Тлеухановой Н.Т. [8], Юдина В.А. [9].

Рассмотрим последовательность $\lambda = \left\{\lambda_k^j\right\}_{(k,j)\in\Omega}$. Всякая последовательность λ порождает оператор Λ, который на полиномах по системе Хаара определяется следующим образом:

$$\Lambda\left(\sum_{k=0}^{N} \sum_{j=1}^{2^k} a_k^j(f)\, \chi_k^j(x) \right) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=1}^{2^k} \lambda_k^j a_k^j \,\chi_k^j(x).$$

Согласно классической теореме Пэли-Марцинкевича [10], если $1 < p < \infty$ и $sup_{(k,j)\in\Omega} \left|\lambda_k^j\right| < \infty$, то

$$\|\Lambda f\|_{L_p} \le c_p \|f\|_{L_p}$$

для всех $f \in L_p$. Точное значение $c_p = \max(p, p') - 1$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ найдено Буркхолдером Д. [11]. Мультипликаторы по системе Хаара изучались в работах С. Яно [12], Новикова И.Я., Семенова Е.М. [13], Кротова В.Г. [14] и др.

Согласно [13, p. 127, теорема 12.1], если $1 < p < q < \infty$, то

$$\|\Lambda\|_{m(L_p \to L_q)} \asymp \sup_{(k,j)\in\Omega} \left|\lambda_k^j\right| 2^{k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}, \tag{2}$$

где константы эквивалентности зависят только от p, q.

Вопросом об ограниченности мультипликаторов по системе Хаара в более общих пространствах посвящены работы [15-19].

Пусть f измеримая функция, принимающая почти всюду конечные значения:

$$m(\sigma, f) = \mu(\{x: x \in [0,1], |f| > \sigma\})$$

её функция распределения. Функция

$$f^*(t) = \inf\{\sigma: m(\sigma, f) \le t\}, \quad t > 0$$

называется невозрастающей перестановкой функции f.

Пусть $0 < p < \infty$, $0 < r \le \infty$. Пространство Лоренца $L_{p,r}[0,1]$ определим как пространство измеримых функций f, определенных на $[0,1]$, для которых конечны величины:

если $r < \infty$

$$\|f\|_{L_{p,r}} = \left(\int_0^1 \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^r \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

если $r = \infty$

$$\|f\|_{L_{p,\infty}} = \sup_t t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < \infty.$$

В работе Брыскина И.Б., Лелонд О.В., Семенова Е.М. [15, с. 760] показано, что если мультипликатор Λ действует из L_p в L_q, $1 < p < q < \infty$, то Λ действует из пространства Лоренца $L_{p,r}$ в пространство Лоренца $L_{q,r}$ для любого $1 \le r \le \infty$. В частности Λ действует из L_p в $L_{q,p}$.

А так же для того чтобы

$$\|\lambda\|_{m(L_p \to L_{q,r})} \asymp \sup_{(k,j)\in\Omega} \left|\lambda_k^j\right| 2^{k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}, \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы $r \geq p$.

В работе Лелонд О.В., Семенова Е.М., Уксусова С.Н. [17, с. 137] доказано следующее утверждение: пусть $1 < p < q < \infty$, $1 \leq r, s \leq \infty$, для того, чтобы

$$\|\lambda\|_{m(L_{p,r} \to L_{q,s})} \asymp \sup_{(k,j)\in\Omega} \left|\lambda_k^j\right| 2^{k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}, \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы $r \leq s$.

Таким образом, оставался открытым вопрос описания класса мультипликаторов рядов Фурье-Хаара $m(L_{p,r} \to L_{q,s})$ при $r > s$. Так же открытым оставался вопрос о мультипликаторах кратных рядов Фурье-Хаара.

Цель работы.

1. Исследование класса мультипликаторов рядов Фурье-Хаара в более общей ситуации, охватывающей случай, когда $r > s$, $0 < r, s \leq \infty$.

2. Исследование мультипликаторов двойных рядов Фурье-Хаара для функций из анизотропных пространств Лоренца. Получение необходимых и достаточных условий для того, чтобы последовательность $\lambda = \left\{\lambda_{k_1 k_2}^{j_1 j_2}\right\}$ принадлежала классу $m\left(L_{\bar{p},\bar{r}} \to L_{\bar{q},\bar{s}}\right)$.

Общая методика исследования. Основным аппаратом исследования являются интерполяционные методы для анизотропных пространств, методы сетевых пространств, неравенства типа Никольского, теоремы вложения для анизотропных пространств.

Научная новизна. В данной работе получены следующие новые результаты:

1. Доказана интерполяционная теорема для анизотропных сетевых пространств $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$, где M - множество всех прямоугольников в $\mathbb{R}^2$, $0 < \bar{p} = (p_1, p_2) \leq \infty$, $1 \leq \bar{q} = (q_1, q_2) \leq \infty$. Показано, что шкала пространств $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ замкнута относительно многомерного интерполяционного метода Фернандеса.

2. В терминах коэффициентов Фурье-Хаара получен критерий принадлежности функции $f(x_1; x_2)$ сетевому пространству $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ и пространству Лебега $L_{\bar{p}}[0,1]^2$ со смешанной метрикой, где $1 < \bar{p} < \infty$, $0 < \bar{q} \leq \infty$, $\bar{p} = (p_1, p_2)$, $\bar{q} = (q_1, q_2)$, M - множество всех прямоугольников в $\mathbb{R}^2$. Доказана теорема типа Харди-Литтлвуда для кратных рядов Фурье-Хаара.

3. Получены необходимые и достаточные условия принадлежности последовательности $\lambda = \left\{\lambda_k^j\right\}$ классу мультипликаторов рядов Фурье-Хаара $m(L_{p,r} \to L_{q,s})$.

4. Получено неравенство типа Никольского для кратных рядов Фурье-Хаара. В частности, получено, что $\left\|S_{2^{k_1}2^{k_2}}(f)\right\|_{L_{\bar{q}}} = o\left(2^{k_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)}2^{k_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)}\right)$ для $f \in L_{\bar{p},\bar{\tau}}[0,1]^2$.

5. Получены необходимые и достаточные условия принадлежности последовательности $\lambda = \left\{\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right\}$ классу мультипликаторов кратных рядов Фурье-Хаара $m\left(L_{\bar{p},\bar{r}} \to L_{\bar{q},\bar{s}}\right)$.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты работы носят теоретический характер и могут найти применение в гармоническом анализе, теории дифференциальных уравнении, теории приближении, теории функциональных пространств.

Апробация работы

Основные результаты диссертационной работы представлены и обсуждены:

- на международных научных конференциях: XV Международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых «Ломоносов - 2019» (Нур-Султан, 2019); «Actual Problems of Analysis, Differential Equations and Algebra» (EMJ-2019) Dedicated to the 10th Anniversary of the Eurasian Mathematical Journal (Нур-Султан, 2019); XVI Международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых «Ломоносов - 2020» (Нур-Султан, 2020); Международная научно-практическая конференция «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики» (Нур-Султан, 2021); Евразийский молодежный форум «Евразия – пространство сотрудничества, мира и согласия», посвященный 20-летнему юбилею Казахстанского филиала МГУ имени М.В. Ломоносова (Нур-Султан, 2021); Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная выдающемуся математику И.Г. Петровскому (Москва, 2021);

- на научном региональном семинаре «Функциональный анализ и его приложения» / руководители: академик М. Отелбаев, академик Р. Ойнаров, профессор Е.Д. Нурсултанов, профессор К.Н. Оспанов (Нур-Султан, 2020);

- на научном семинаре «Современные проблемы математики» под руководством профессора Е.Д. Нурсултанова, Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова (Нур-Султан, 2018, 2019, 2020);

- на научном семинаре «Теория тригонометрических и ортогональных рядов» под руководством профессоров кафедры теории функций и функционального анализа МГУ имени М.В. Ломоносова Потапова М.К., Скворцова В.А., Лукашенко Т.П., Дьяченко М.И. (Москва, 2020);

- на городском научном семинаре «Дифференциальные операторы и их приложения» / руководители семинара: академик НАН РК М. Отелбаев, академик НАН РК Т.Ш. Кальменов, профессор Б.Е. Кангужин, член-корр. НАН РК М.А. Садыбеков, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Институт математики и математического моделирования (Алматы, 2022).

Публикации. Основной материал, представленный в диссертации, был опубликован в пяти научных журналах и сборниках девяти международных научных конференций:

1. О мультипликаторах рядов Фурье по системе Хаара // Матем. заметки. – 2021. – №109:6. – С. 912-920.
2. Interpolation theorem for anisotropic net spaces // Russian Mathematics. – 2021. – Vol. 65, №8. – P. 1-12.
3. Multipliers of double Fourier–Haar series // Advances in Operator Theory. – 2021. – №6:3.
4. On the inequality of different metrics for multiple Fourier-Haar series // Eurasian Mathematical Journal. – 2021. – Vol. 12, №3. – P. 90-93.
5. The Hardy-Littlewood theorem for double Fourier-Haar series from mixed metric Lebesgue $L_{\bar{p}}[0,1]^2$ and net $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ spaces // Analysis Math. – 2022. – №48:1. – P. 5-17.
6. Интерполяционная теорема для анизотропных сетевых пространств // XV Международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых "Ломоносов-2019" (Нур-Султан, 2019. – С. 16-17).
7. О неравенстве разных метрик для кратных рядов Фурье-Хаара // XVI Международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых "Ломоносов-2020"(Нур-Султан, 2020. – С. 19-20).
8. Интерполяционная теорема для сетевых пространств // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан и Workshop «Problems of modelling processes in electrical contacts», посвященная 80-летнему юбилею академика НАН РК С.Н. Харина (Алматы, 2019. – С. 74).
9. Теорема о мультипликаторах двойных рядов Фурье-Хаара // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 75-летию академика НАН РК Т.Ш. Кальменова (Алматы, 2021. – С. 17-18).
10. Теорема Харди-Литтлвуда для кратных рядов Фурье-Хаара // Международная научная конференция «Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры» (EMJ-2019) (Нур-Султан, 2019. – С. 52-53).
11. Мультипликаторы кратных рядов Фурье-Хаара функций из анизотропных пространств Лоренца // Международная научная конференция "Уфимская осенняя математическая школа-2020" (Уфа, 2020. – С. 88-90).
12. О мультипликаторах двойных рядов Фурье-Хаара // Международная научно-практическая конференция «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики» (Нур-Султан, 2021. – С. 41-46).
13. Теорема о мультипликаторах рядов Фурье по системе Хаара // Евразийский молодежный форум «Евразия – пространство сотрудничества, мира и

согласия», посвященный 20-летнему юбилею Казахстанского филиала МГУ имени М. В. Ломоносова (Нур-Султан, 2021. – С. 17-18).

14. О мультипликаторах рядов Фурье-Хаара // Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы» посвященная выдающемуся математику И.Г. Петровскому (Москва, 2021. – С. 329-331).

Связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами. Тема диссертационного исследования соответствует приоритетному направлению развития «Научные исследования в области естественных наук», специализированное научное направление «Фундаментальные и прикладные исследования в области математики и механики». Часть результатов диссертации вошли в промежуточный отчет за 2021 г. по проекту AP09260223 «Преобразования Фурье и мультипликаторы преобразований Фурье функций многих переменных из анизотропных пространств» и за 2020 г. по проекту AP08053326 «Методы функциональных пространств и их приложения в гармоническом анализе».

Структура и объем диссертации. Работа, объемом 83 страницы, состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка литературы и публикаций, включающего 61 наименования. Утверждения имеют номера, состоящие из двух индексов. Первый индекс имеет номер раздела, второй – собственный номер утверждения в данном разделе. Формулы имеют сквозную нумерацию.

Основное содержание работы. Перейдем к основным результатам диссертационной работы.

В первом разделе изучаются анизотропные сетевые пространства $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$, где M - множество всех прямоугольников в $\mathbb{R}^2$, $0<\bar{p} = (p_1,p_2) \le \infty$, $1 \le \bar{q} = (q_1,q_2) \le \infty$ и их интерполяционные свойства. Показано, что шкала пространств $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ замкнута относительно многомерного интерполяционного метода Фернандеса. Основным результатом первого раздела является следующая теорема [20-22]:

Теорема 1.3. *Пусть* M - *множество всех прямоугольников в* $\mathbb{R}^2$, $0<\bar{p}_0 = (p_1^0,p_2^0) < \bar{p} = (p_1,p_2) < \bar{p}_1 = (p_1^1,p_2^1) \le \infty$, $1 \le \bar{q}_0 = (q_1^0,q_2^0), \bar{q} = (q_1,q_2), \bar{q}_1 = (q_1^1,q_2^1) \le \infty$, $\bar{p}_\varepsilon = \left(p_1^{\varepsilon_1},p_2^{\varepsilon_2}\right)$, $\bar{q}_\varepsilon = \left(q_1^{\varepsilon_1},q_2^{\varepsilon_2}\right)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2) \in E$, $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2)\colon \varepsilon_i = 0 \text{ или } \varepsilon_i = 1,\ i = 1,2\}$, *тогда*

$$\left(N_{\bar{p}_\varepsilon,\bar{q}_\varepsilon}(M), \varepsilon \in E\ \right)_{\bar{\theta},\bar{q}} = N_{\bar{p},\bar{q}}(M),$$

где $\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1-\bar{\theta}}{\bar{p}_0} + \frac{\bar{\theta}}{\bar{p}_1}$.

Во втором разделе изучается теорема типа Харди-Литтлвуда для двойных рядов Фурье-Хаара.

При исследовании связи между интегрируемостью функции и суммируемостью ее коэффициентов Фурье наиболее ярким примером является равенство Парсеваля:

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2,$$

где a_k- коэффициенты Фурье по тригонометрической системе.

В случае, когда $f \in L_p[0,2\pi]$, $p \neq 2$ здесь имеют место неравенства Харди-Литтлвуда: если $2 \leq p < \infty$, тогда

$$\|f\|_{L_p}^p \leq c_1 \sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2} |a_k|^p,$$

если $1 \leq p \leq 2$, тогда

$$c_2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2} |a_k|^p \leq \|f\|_{L_p}^p.$$

Для функции $f \in L_p[0,2\pi]$ нижние оценки при $p > 2$ и верхние оценки при $1 < p \leq 2$ доказаны лишь при дополнительных условиях.

Хорошо известна теорема Харди-Литтлвуда [1,с.165] для тригонометрических рядов:

Пусть $1 < p < \infty$ *и* $f \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx$. *Если* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$- *монотонно невозрастающая последовательность, либо* f *- монотонная функция, то для того чтобы* $f \in L_p[0,2\pi]$ *необходимо и достаточно*

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^{p-2} |a_k|^p < \infty,$$

причем выполнено соотношение

$$\|f\|_{L_p}^p \asymp \sum_{k=0}^{\infty} k^{p-2} |a_k|^p.$$

Как видим, условия принадлежности пространству L_p для монотонных функций и функций с монотонными коэффициентами одни и те же, т.е. сходимость ряда:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^{p-2} |a_k|^p.$$

Для рядов по системе Хаара ситуация иная. Ульянов П.Л.в работе [23] доказал, что если коэффициенты Фурье-Хаара $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ монотонны, то для того чтобы функция $f \in L_p[0,1]$ при $1 < p < \infty$ необходимо и достаточно, чтобы $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2$, т.е. сходился ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2$.

В то же время Нурсултановым Е.Д. и Аубакировым Т.У. в работе [24] доказана следующая теорема:

Пусть $1 < p < \infty$, f *- монотонная функция. Тогда для того, чтобы* $f \in L_p[0,1]$ *необходимо и достаточно, чтобы для последовательности ее коэффициентов Фурье-Хаара* $\left\{a_k^j\right\}_{k=0,j=1}^{\infty,2^k}$ *имело место*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}\sup_{1\le j\le 2^k}\left|a_k^j\right|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Целью второго раздела является получение результата Нурсултанова Е.Д. и Аубакирова Т.У. для двойных рядов Фурье-Хаара. Для кратных тригонометрических рядов аналоги теоремы Харди-Литтлвуда были получены Морицем Ф. [25], Дьяченко М.И. [26, 27].

Основными результатами второй главы являются теоремы Харди-Литтлвуда для кратных рядов Фурье-Хаара в анизотропных сетевых пространствах $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ и в пространствах Лебега $L_{\bar{p}}[0,1]^2$ со смешанной метрикой [28, 29]:

Теорема 2.2. *Пусть* $1 < \bar{p} < \infty$, $0 < \bar{q} \le \infty$, $\bar{\sigma} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\bar{p}}$, M *- множество всех прямоугольников в* $[0,1]^2$. *Тогда, для того, чтобы* $f \in N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ *необходимо и достаточно, чтобы последовательность ее коэффициентов Фурье-Хаара* $a = \left\{a_{k_1k_2}^{j_1j_2}\colon\ k_i \in \mathbb{Z},\ k_i \ge 0,\ \ 1 \le j_i \le 2^{k_i},\ \ i = 1,2\right\}$ *принадлежала пространству* $l_{\bar{q}}^{\bar{\sigma}}(l_\infty)$, *при этом имеет место соотношение*

$$\|f\|_{N_{\bar{p},\bar{q}}(M)} \asymp \|a\|_{l_{\bar{q}}^{\bar{\sigma}}(l_\infty)}. \tag{5}$$

Теорема 2.3. *Пусть* $1 < \bar{p} < \infty$, $\bar{\sigma} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\bar{p}}$, $f(x_1, x_2)$ *- неотрицательная, монотонная по каждой переменной функция. Тогда, для того, чтобы* $f \in L_{\bar{p}}[0,1]^2$ *необходимо и достаточно, чтобы последовательность ее коэффициентов Фурье-Хаара* $a = \left\{a_{k_1k_2}^{j_1j_2}\colon\ k_i \in \mathbb{Z},\ k_i \ge 0,\ \ 1 \le j_i \le 2^{k_i},\ \ i = 1,2\right\}$ *принадлежала пространству* $l_{\bar{q}}^{\bar{\sigma}}(l_\infty)$, *при этом имеет место соотношение*

$$\|f\|_{L_{\bar{p}}[0,1]^2} \asymp \|a\|_{l_{\bar{q}}^{\bar{\sigma}}(l_\infty)}.$$

Отметим, что при доказательстве теоремы 2.2 основную роль играет теорема 1.3.

В третьем разделе получены необходимые и достаточные условия принадлежности последовательности $\{\lambda_k^j\}_{k=0,j=1}^{\infty,2^k}$ классу $m(L_{p,r} \to L_{q,s})$, в частности охватывающий случай, когда $r > s$, $0 < r, s \le \infty$ [30-32]:

Теорема 3.2. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $0 < r, s \le \infty$, $\frac{1}{\xi} = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r}\right)_+ = max\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}, 0\right\}$, *тогда*

$$\|\lambda\|_{m(L_{p,r} \to\ L_{q,s})} \asymp \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)k} \sup_{1 \le j \le 2^k} \left|\lambda_k^j\right|\right)^{\xi}\right)^{\frac{1}{\xi}},$$

в случае, когда $\xi = +\infty$, *выражение справа заменяется на* $\sup_{\substack{0 \le k \le \infty \\ 1 \le j \le 2^k}} 2^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)k} \left|\lambda_k^j\right|$.

Данный результат обобщает и дополняет результат работы Лелонд О.В., Семенова Е.М., Уксусова С.Н. [17, с. 137].

В четвертой главе получено неравенство, описывающее поведение частичных сумм двойных рядов Фурье-Хаара [33, 34]:

$$\left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \left(2^{k_1\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{q_2}-\frac{1}{p_2}\right)} \left\|S_{2^{k_1}2^{k_2}}(f)\right\|_{L_{\bar{q}}}\right)^{\tau_1}\right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right)^{\frac{1}{\tau_2}} \le C\|f\|_{L_{\bar{p},\bar{\tau}}}. \qquad (6)$$

В частности, из этого неравенства следует, что

$$\left\|S_{2^{k_1}2^{k_2}}(f)\right\|_{L_{\bar{q}}} = o\left(2^{k_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)}\right)$$

для $f \in L_{\bar{p},\bar{\tau}}[0,1]^2$.

Основным результатом четвертой главы является получение необходимых и достаточных условий принадлежности последовательности $\lambda = \left\{\lambda_{k_1 k_2}^{j_1 j_2}\right\}$ классу $m\left(L_{\bar{p},\bar{r}} \to L_{\bar{q},\bar{s}}\right)$ [35-38]. В частности, описан случай, когда $\bar{s} < \bar{r}$, что является новым результатом и в одномерном случае.

Теорема 4.3. *Пусть* $1 < \bar{p} < \bar{q} < \infty$, $0 < \bar{r}, \bar{s} \le \infty$, $\frac{1}{\xi_i} = \left(\frac{1}{s_i} - \frac{1}{r_i}\right)_+ = max\left\{\frac{1}{s_i} - \frac{1}{r_i}, 0\right\}$, $i = 1, 2$. *Тогда последовательность комплексных чисел* $\lambda =$

$\left\{\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right\}_{(k_i,j_i)\in\Omega}$ *является мультипликатором из* $L_{\bar{p},\bar{r}}[0,1]^2$ *в* $L_{\bar{q},\bar{s}}[0,1]^2$ *тогда и только тогда, когда*

$$\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{k_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)}\sup_{\substack{1\le j_i\le 2^{k_i}\\ i=1,2}}\left|\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right|\right)^{\xi_1}\right)^{\frac{\xi_2}{\xi_1}}\right)^{\frac{1}{\xi_2}}<\infty$$

и верно

$$\|\lambda\|_{m\left(L_{\bar{p},\bar{r}}[0,1]^2\to\ L_{\bar{q},\bar{s}}[0,1]^2\right)}$$

$$\asymp\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{k_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)}\sup_{\substack{1\le j_i\le 2^{k_i}\\ i=1,2}}\left|\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right|\right)^{\xi_1}\right)^{\frac{\xi_2}{\xi_1}}\right)^{\frac{1}{\xi_2}}.$$

Здесь и далее в случае, когда $\xi_i=+\infty$, *соответствующая сумма в выражении справа заменяется на супремум.*

При доказательстве достаточности существенную роль играет неравенство, полученное в пункте 4.2 раздела 4, а при доказательстве необходимости используется теорема 2.2.

1 ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ СЕТЕВЫХ ПРОСТРАНСТВ

1.1 Анизотропные сетевые пространства и анизотропные пространства Лоренца

Для пространств со смешанной метрикой, анизотропных пространств вещественный интерполяционный метод не работает. Для интерполяции пространств со смешанной метрикой мы будем использовать интерполяционный метод Фернандеса Д.Л. [39-41].

Пусть A_1 – банахово пространство, A_2 – функциональная банахова решетка. Через $A = (A_1, A_2)$ обозначим пространство A_1 – значных измеримых функций таких, что $\|f\|_{A_1} \in A_2$ с нормой $\|f\| = \left\| \|f(x)\|_{A_1} \right\|_{A_2}$. Пространство $A = (A_1, A_2)$ называется анизотропным пространством.

Пусть $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\colon\ \varepsilon_i = 0 \text{ или } \varepsilon_i = 1,\ i = 1,2\}$. $\{A_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E} = \left\{A_{(0,0)}, A_{(0,1)}, A_{(1,0)}, A_{(1,1)}\right\}$ - семейство банаховых пространств, являющихся подпространствами некоторого линейного хаусдорфова пространства, которое называется совместимым семейством банаховых пространств.

Пусть $0 < \bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2) < 1$, $0 < \bar{q} \le \infty$. $A_{\bar{\theta},\bar{q}} = (A_\varepsilon;\ \varepsilon \in E)_{\bar{\theta},\bar{q}}$ обозначим линейное подмножество $\sum_{\varepsilon \in E} A_\varepsilon = \{a\colon a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon,\ a_\varepsilon \in A_\varepsilon\}$, для элементов которого верно:

$$\|a\|_{A_{\bar{\theta},\bar{q}}} = \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \left({t_1}^{-\theta_1} {t_2}^{-\theta_2} K(t_1, t_2)\right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{q_2}} < \infty,$$

где

$$K(t_1, t_2, a;\ A_\varepsilon, \varepsilon \in E) = \inf\left\{\sum_{\varepsilon \in E} {t_1}^{\varepsilon_1} {t_2}^{\varepsilon_2} \|a_\varepsilon\|_{A_\varepsilon}\colon\ a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon, a_\varepsilon \in A_\varepsilon\right\}.$$

Лемма 1.1. [42] *Пусть* $0 < \bar{\theta} < 1$, $0 < \bar{\tau} \le \infty$, $A = \{A_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$, $B = \{B_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$ *– два семейства совместимых банаховых пространств. Если для линейного оператора* T *и для каждого* $\varepsilon \in E$

$$T\colon A_\varepsilon \to B_\varepsilon \ \text{ с нормой } \ M_\varepsilon,$$

тогда

$$\|T\|_{A_{\bar{\theta},\bar{\tau}} \to B_{\bar{\theta},\bar{\tau}}} \le max\, M_\varepsilon.$$

Пусть $0 < \bar{p} \leq \infty$. Пространство Лебега со смешанной метрикой $L_{\bar{p}}[0,1]^2$ это множество всех измеримых на $[0,1]^2$ функций $f(x_1, x_2)$, для которых

$$\|f\|_{L_{\bar{p}}[0,1]^2} := \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |f(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} < \infty.$$

Пусть f измеримая функция, принимающая почти всюду конечные значения,

$$m(\sigma, f) = \mu(\{x : x \in [0,1], |f| > \sigma\})$$

её функция распределения. Функция

$$f^*(t) = \inf\{\sigma : m(\sigma, f) \leq t\}, \quad t > 0$$

называется невозрастающей перестановкой функции f.

Пусть $f(x_1, x_2)$ - измеримая на $[0,1]^2$ функция, через $f^{*_1 *_2}(t_1, t_2)$ обозначим функцию, полученную применением невозрастающей перестановки к функции $f(x_1, x_2)$ последовательно по переменным x_1, x_2.

Пусть $\bar{p} = (p_1, p_2)$, $\bar{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ такие, что если $0 < p_i < \infty$, то $0 \leq \tau_i \leq \infty$, если $p_i = \infty$, то и $\tau_i = \infty$, $i = 1, 2$. Анизотропным пространством Лоренца $L_{\bar{p},\bar{\tau}}[0,1]^2$ [43] назовем множество функций, для которых конечна величина:

$$\|f\|_{L_{\bar{p},\bar{\tau}}[0,1]^2} = \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_2^{\frac{1}{p_2}} t_1^{\frac{1}{p_1}} f^{*_1 *_2}(t_1, t_2) \right)^{\tau_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{\tau_2}}.$$

Здесь и далее, когда $\tau = \infty$, интеграл $\left(\int_0^1 (\varphi(t))^\tau \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\tau}}$ понимается как $\sup_{t>0} \varphi(t)$.

Если $0 < \bar{p}_0 < \bar{p}_1 < \infty$ и $0 < \bar{\tau}_0, \bar{\tau}_1 \leq \infty$, то

$$L_{\bar{p}_1,\bar{\tau}_1}[0,1]^2 \hookrightarrow L_{\bar{p}_0,\bar{\tau}_0}[0,1]^2;$$

если $0 < \bar{p} < \infty$ и $0 < \bar{\tau}_0 \leq \bar{\tau}_1 \leq \infty$, то

$$L_{\bar{p},\bar{\tau}_0}[0,1]^2 \hookrightarrow L_{\bar{p},\bar{\tau}_1}[0,1]^2.$$

Теорема 1.1. [44] *Пусть* $0 < \bar{p}_0 = (p_1^0, p_2^0) < \bar{p}_1 = (p_1^1, p_2^1) \leq \infty$, $\bar{p}_\varepsilon = \left(p_1^{\varepsilon_1}, p_2^{\varepsilon_2}\right)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in E$, $0 < \bar{\theta} < 1$, $0 < \bar{\tau} \leq \infty$. *Тогда для пространств Лебега со смешанной метрикой* $\left\{L_{\bar{p}_\varepsilon}[0,1]^2\right\}_{\varepsilon \in E}$ *справедливо*

$$\left(L_{\bar{p}_\varepsilon}[0,1]^2;\ \varepsilon \in E\right)_{\bar{\theta},\bar{\tau}} = L_{\bar{p},\bar{\tau}}[0,1]^2,$$

где $\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1-\bar{\theta}}{\bar{p}_0} + \frac{\bar{\theta}}{\bar{p}_1}$.

Дальнейшее развитие данного метода можно найти в работах Нурсултанова Е.Д. [45, 46].

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана мера Лебега μ, M - некоторое фиксированное семейство множеств конечной меры из $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем M будем называть "сетью".

Пусть M - множество всех отрезков из $\mathbb{R}$. Для функции $f(x)$, определенной и интегрируемой на каждом отрезке Q из M, определим функцию:

$$\bar{f}(t, M) = \sup_{\substack{Q \in M \\ |Q| > t}} \frac{1}{|Q|} \left| \int_Q f(x) dx \right|, \qquad t > 0,$$

где точная верхняя грань берется по всем отрезкам $Q \in M$, длина которых $|Q| > t$. Функция $\bar{f}(t, M)$ называется усреднением функции f по сети M.

Через $N_{p,q}(M)$, $0 < p, q \leq \infty$ обозначим множество функций f, для которых при $q < \infty$

$$\|f\|_{N_{p,q}(M)} = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \bar{f}(t, M) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

и при $q = \infty$

$$\|f\|_{N_{p,\infty}(M)} = \sup_{t > 0} t^{\frac{1}{p}} \bar{f}(t, M) < \infty.$$

Эти пространства называются сетевыми пространствами, они были введены и изучены в работе Нурсултанова Е.Д. [47]. Сетевые пространства являются важным инструментом исследования в теории рядов Фурье, в теории операторов и в других направлениях [48-54].

В работе Нурсултанова Е.Д. и Аубакирова Т.У. [24, с. 342] было показано, что данная шкала пространств $N_{p,q}(M)$ является замкнутой относительно вещественного интерполяционного метода, т.е. при $p_0 \neq p_1$имеет место

$$\left(N_{p_0,q_0}(M), \qquad N_{p_1,q_1}(M)\right)_{\theta,q} = N_{p,q}(M),$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Отметим некоторые свойства сетевых пространств:

Лемма 1.2. [47, с. 87] *Верны следующие утверждения:*

1. Пусть M - произвольная сеть множеств из отрезка $[0,1]$, *тогда имеет место вложение*

$$L_{p,q}[0,1] \hookrightarrow N_{p,q}(M).$$

2. Пусть M - произвольная сеть, при $q \leq q_1$ имеет место вложение

$$N_{p,q}(M) \hookrightarrow N_{p,q_1}(M).$$

3. Пусть сеть M такова, что $\sup_{e \in M}|e| = a < \infty$, *то при* $0 < p < p_1 < \infty$, $0 < q, q_1 \leq \infty$ *верно*

$$N_{p_1,q_1}(M) \hookrightarrow N_{p,q}(M).$$

Рассмотрим обобщение пространства $N_{p,q}(M)$ в двумерном случае.

Пусть M - множество всех прямоугольников $Q = Q_1 \times Q_2$ из $\mathbb{R}^2$, для функции $f(x_1, x_2)$ интегрируемой на каждом множестве $Q \in M$ определим:

$$\bar{f}(t_1, t_2, M) = \sup_{\substack{|Q_i| \geq t_i \\ i=1,2}} \frac{1}{|Q_1||Q_2|} \left| \int\limits_{Q_1} \int\limits_{Q_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right|, \qquad t_i > 0,$$

где $|Q_i|$ - длина отрезка Q_i.

Пусть $0 < \bar{p} = (p_1, p_2) < \infty$, $0 < \bar{q} = (q_1, q_2) \leq \infty$. Через $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ обозначим множество всех функций $f(x_1, x_2)$, для которых:

$$\|f\|_{N_{\bar{p},\bar{q}}(M)} = \left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty \left(t_1^{\frac{1}{p_1}} t_2^{\frac{1}{p_2}} \bar{f}(t_1, t_2, M) \right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} < \infty,$$

здесь и далее, когда $q = \infty$, выражение $\left(\int_0^1 (\varphi(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$ понимается как $\sup_{t>0} \varphi(t)$.

Как видно из определения пространства $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$, это пространство функций, которые по каждой переменной имеют различные характеристики. Данное пространство называют анизотропным сетевым пространством.

Нам понадобятся классические неравенства Харди. Сформулируем их в виде леммы.

Лемма 1.3 (Неравенство Харди)**.** *Пусть* $0 < v \le q < \infty$, $\alpha > 0$, *тогда имеют место неравенства:*

$$\left(\int_0^\infty \left(t^\alpha \left(\int_t^\infty |\varphi(s)|^v ds\right)^{\frac{1}{v}}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \le (\alpha v)^{-\frac{1}{v}} \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{v}+\alpha}|\varphi(t)|\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{-\alpha} \left(\int_0^t |\varphi(s)|^v ds\right)^{\frac{1}{v}}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \le (\alpha v)^{-\frac{1}{v}} \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{v}-\alpha}|\varphi(t)|\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Теорема 1.2. *Пусть* $1 < \bar{p} < \infty$, $0 < \bar{q} \le \infty$, *тогда*

$$L_{\bar{p},\bar{q}}[0,1]^2 \hookrightarrow N_{\bar{p},\bar{q}}(M).$$

Доказательство. Воспользуемся соотношением

$$\bar{f}(t_1,t_2,M) \le \frac{1}{t_1 t_2} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} f^{*_1 *_2}(s_1,s_2) ds_1 ds_2,$$

тогда

$$\|f\|_{N_{\bar{p},\bar{q}}(M)} \le \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \left(t_1^{\frac{1}{p_1}-1} t_2^{\frac{1}{p_2}-1} \int_0^{t_2}\int_0^{t_1} f^{*_1 *_2}(s_1,s_2) ds_1 ds_2\right)^{q_1} \frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}} \frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}$$

Далее, применив неравенство Харди (см. лемму 1.3), получим $\|f\|_{N_{\bar{p},\bar{q}}(M)} \le$ $\mathrm{c}\|f\|_{L_{\bar{p},\bar{q}}}$.

1.2 Свойства усреднений относительно сети прямоугольников

Следующие леммы являются важными при доказательстве интерполяционной теоремы

Лемма 1.4. *Пусть* $\varphi(x)$ *- локально интегрируемая функция,* $\mathbb{R} = \bigcup_k I_k$ *разбиение* $\mathbb{R}$ *на отрезки длиной* $|I_k| = \tau > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, *причем* $|I_k \cap I_j| = 0$, $k \ne j$. *Тогда для произвольного отрезка* Q *длиной* $|Q| \ge \tau$ *найдутся отрезки* Q', Q'', Q''' *такие,* *что* Q''' *- состоит из объединения целого числа отрезков разбиения и* $\tau \leq |Q'| \leq 2\tau$, $\tau \leq |Q''| \leq 2\tau$, $|Q| \leq |Q'''| \leq 3|Q|$ *и имеет место неравенство:*

$$\left|\int_Q \varphi(x)dx\right| \leq \left|\int_{Q'} \varphi(x)dx\right| + \left|\int_{Q''} \varphi(x)dx\right| + \left|\int_{Q'''} \varphi(x)dx\right|.$$

Доказательство. Пусть функция φ удовлетворяет условиям леммы, $Q \subset \mathbb{R}$ - отрезок и $|Q| \geq \tau$. Пусть:

$$\bigcup_{I_k \cap Q \neq \emptyset} I_k = \bigcup_{k=k'}^{k''} I_k\,.$$

Возьмем

$$Q''' = \bigcup_{k=k'-1}^{k''+1} I_k,$$

$$Q' = (I_{k'-1} \cup I_{k'}) \backslash Q,$$

$$Q'' = (I_{k''} \cup I_{k''+1}) \backslash Q.$$

Тогда имеем $\tau \leq |Q'| \leq 2\tau$, $\tau \leq |Q''| \leq 2\tau$, $|Q| \leq |Q'''| \leq 3|Q|$ и

$$\left|\int_Q \varphi(x)dx\right| = \left|\int_{Q'''} \varphi(x)dx - \int_{Q'} \varphi(x)dx - \int_{Q''} \varphi(x)dx\right| \leq$$
$$\leq \left|\int_{Q'''} \varphi(x)dx\right| + \left|\int_{Q'} \varphi(x)dx\right| + \left|\int_{Q''} \varphi(x)dx\right|.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Пусть* $\mathbb{R} = \bigcup_k I_k$ *разбиение* $\mathbb{R}$ *на отрезки длиной* $|I_k| = \tau > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, *причем* $\left|I_k \cap I_j\right| = 0$, $k \neq j$.*Пусть* φ *такая функция, что*

$$\int_{I_k} \varphi(x)dx = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

тогда для произвольного отрезка Q *длиной* $|Q| \geq \tau$ *найдутся отрезки* Q' *и* Q'' *такие, что* $\tau \leq |Q'| \leq 2\tau$, $\tau \leq |Q''| \leq 2\tau$ *и*

$$\left|\iint\limits_{Q} \varphi(x)dx\right| \leq \left|\iint\limits_{Q'} \varphi(x)dx\right| + \left|\iint\limits_{Q''} \varphi(x)dx\right|.$$

Доказательство сразу следует из леммы 1.4 и соотношения (7).

Пусть $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in (0, +\infty)^2$, $I_k^1 = [0, \tau_1] + k\tau_1$, $k \in \mathbb{Z}$, $I_m^2 = [0, \tau_2] + m\tau_2$, $m \in \mathbb{Z}$. Система множеств $G_\tau = \{I_{km} = I_k \times I_m\}_{(k,m)\in\mathbb{Z}^2}$ дает разбиение $\mathbb{R}^2$ на прямоугольники, т.е. $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{(k,m)\in\mathbb{Z}^2} I_{km}$.

Для локально интегрируемой функции $f(x_1, x_2)$ и множества G_τ определим функции $f_{00}(x_1, x_2)$, $f_{01}(x_1, x_2)$, $f_{10}(x_1, x_2)$, $f_{11}(x_1, x_2)$ следующим образом:

$$f_{01}(x_1, x_2) = \frac{1}{|I_m^2|}\int_{I_m^2} f(x_1, x_2{}')dx_2{}' - \frac{1}{|I_k^1||I_m^2|}\int_{I_k^1}\int_{I_m^2} f(x_1{}', x_2{}')dx_1{}'\,dx_2{}', \quad (8)$$

$$f_{10}(x_1, x_2) = \frac{1}{|I_k^1|}\int_{I_k^1} f(x_1{}', x_2)dx_1{}' - \frac{1}{|I_k^1||I_m^2|}\int_{I_k^1}\int_{I_m^2} f(x_1{}', x_2{}')dx_1{}'\,dx_2{}', \quad (9)$$

$$f_{11}(x_1, x_2) = \frac{1}{|I_k^1||I_m^2|}\int_{I_k^1}\int_{I_m^2} f(x_1{}', x_2{}')dx_1{}'\,dx_2{}', \quad (10)$$

$$f_{00} = f - f_{01} - f_{10} - f_{11}, \quad (11)$$

т.е.

$$f = f_{00} + f_{01} + f_{10} + f_{11},$$

где $(x_1, x_2) \in I_k^1 \times I_m^2$.

Данные функции назовем разложением функции $f(x_1, x_2)$, соответствующим разбиению G_τ.

Лемма 1.6. *Пусть G_τ- разбиение $\mathbb{R}^2$ на прямоугольники, $f(x_1, x_2)$ – локально интегрируема на $\mathbb{R}^2$. $f = f_{00} + f_{01} + f_{10} + f_{11}$ - разложение, соответствующее разбиению G_τ. Тогда*

$$\int\limits_{I_k^1} f_{00}(x_1, x_2)dx_1 = \int\limits_{I_k^1} f_{01}(x_1, x_2)dx_1 = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \;\; x_2 \in \mathbb{R}$$
$$\int\limits_{I_m^2} f_{00}(x_1, x_2)dx_2 = \int\limits_{I_m^2} f_{10}(x_1, x_2)dx_2 = 0, \quad m \in \mathbb{Z}, \;\; x_1 \in \mathbb{R}.$$

Доказательство сразу следует из определений функций f_{00}, f_{10}, f_{01}.

Лемма 1.7. *Пусть G_τ- разбиение $\mathbb{R}^2$ на прямоугольники, $f(x_1, x_2)$ – локально интегрируема на $\mathbb{R}^2$ и функция f_{00} определена равенством* (11). *Тогда*

$$\bar{f}_{00}(t_1,t_2;M) \le \begin{cases} 64\frac{\tau_1}{t_1}\frac{\tau_2}{t_2}\bar{f}(\tau_1,\tau_2;M), & t_1>\tau_1, t_2>\tau_2 \\ 64\frac{\tau_1}{t_1}\bar{f}(\tau_1,t_2;M), & t_1>\tau_1, t_2\le\tau_2 \\ 64\frac{\tau_2}{t_2}\bar{f}(t_1,\tau_2;M), & t_1\le\tau_1, t_2>\tau_2 \\ 64\bar{f}(t_1,t_2;M), & t_1\le\tau_1, t_2\le\tau_2 \end{cases} \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $Q = Q_1 \times Q_2 \in M$, $|Q_1| = s_1$, $|Q_2| = s_2$. Докажем следующее неравенство:

$$\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} f_{00}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| \le$$

$$\le \begin{cases} 64\frac{\tau_1}{s_1}\frac{\tau_2}{s_2}\bar{f}(\tau_1,\tau_2;M), s_1>\tau_1, s_2>\tau_2 \\ 16\frac{\tau_1}{s_1}\bar{f}(\tau_1,s_2;M),\ s_1>\tau_1, s_2\le\tau_2 \\ 16\frac{\tau_2}{s_2}\bar{f}(s_1,\tau_2;M),\ s_1\le\tau_1, s_2>\tau_2 \\ 4\bar{f}(s_1,s_2;M),\ s_1\le\tau_1, s_2\le\tau_2 \end{cases} \tag{13}$$

Рассмотрим случай $s_1 \le \tau_1, s_2 \le \tau_2$. Используя определение функции f_{00}, получим:

$$\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} f_{00}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| \le \frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} f(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| +$$
$$+\left|\frac{1}{|Q_1|}\sum_{|I_m^2\cap Q_2|>0}\frac{|I_m^2\cap Q_2|}{|I_m^2||Q_2|}\int\limits_{Q_1}\int\limits_{I_m^2} f(x_1,x_2)dx_2dx_1\right| +$$
$$+\left|\frac{1}{|Q_2|}\sum_{|I_k^1\cap Q_1|>0}\frac{|I_k^1\cap Q_1|}{|I_k^1||Q_1|}\int\limits_{Q_2}\int\limits_{I_k^1} f(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| +$$
$$+\sum\nolimits_{|I_k^1\cap Q_1|>0}\sum\nolimits_{|I_m^2\cap Q_2|>0}\frac{|I_k^1\cap Q_1||I_m^2\cap Q_2|}{|I_k^1||I_m^2||Q_1||Q_2|}\int_{I_k^1}\int_{I_m^2} f(x_1,x_2)dx_2dx_1. \tag{14}$$

Далее имеем:

$$\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} f_{00}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| \le \frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} f(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| +$$

$$+\sup_{|e_2|\geq\tau_2, e_2\in W}\frac{1}{|Q_1||e_2|}\left|\int_{e_2}\int_{Q_1} f(x_1,x_2)dx_1dx_2\right|\frac{1}{|Q_2|}\sum_{|I_m^2\cap Q_2|>0}|I_m^2\cap Q_2|+$$

$$+\sup_{|e_1|\geq\tau_1, e_1\in W}\frac{1}{|Q_2||e_1|}\left|\int_{Q_2}\int_{e_1} f(x_1,x_2)dx_1dx_2\right|\frac{1}{|Q_1|}\sum_{|I_k^1\cap Q_1|>0}\left|I_k^1\cap Q_1\right|+$$

$$+\bar{f}(\tau_1,\tau_2)\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\sum_{|I_k^1\cap Q_1|>0}\sum_{|I_m^2\cap Q_2|>0}\left|I_k^1\cap Q_1\right||I_m^2\cap Q_2|,$$

здесь W - множество отрезков в $\mathbb{R}$.

Таким образом,

$$\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int_{Q_2}\int_{Q_1} f_{00}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right|\leq\bar{f}(s_1,s_2;M)+\bar{f}(s_1,\tau_2;M)+$$
$$+\bar{f}(\tau_1,s_2;M)+\bar{f}(\tau_1,\tau_2;M)\leq 4\bar{f}(s_1,s_2;M). \qquad (15)$$

Рассмотрим случай, когда $|Q_1|=s_1>\tau_1$, $|Q_2|=s_2\leq\tau_2$. Учитывая лемму 1.6, заметим, что функция $\varphi(x)=\int_{Q_2} f_{00}(x_1,x_2)dx_2$ удовлетворяет лемме 1.5, поэтому найдутся отрезки Q' и Q'' такие, что $\tau\leq|Q'|\leq 2\tau$, $\tau\leq|Q''|\leq 2\tau$ и

$$\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int_{Q_2}\int_{Q_1} f_{00}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right|\leq$$
$$\leq\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left(\left|\int_{Q_2}\int_{Q_1'} f_{00}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right|+\left|\int_{Q_2}\int_{Q_1''} f_{00}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right|\right)\leq$$
$$\leq\frac{2\tau_1}{s_1}\left(\frac{1}{|Q_1'||Q_2|}\left|\int_{Q_2}\int_{Q_1'} f_{00}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right|+\frac{1}{|Q_1''||Q_2|}\left|\int_{Q_2}\int_{Q_1''} f_{00}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right|\right).$$

Тогда аналогично доказанному выше (см. (15)), имеем

$$\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int_{Q_2}\int_{Q_1} f_{00}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right|\leq\frac{2\tau_1}{s_1}\left(4\bar{f}(|Q_1'|,s_2;M)+4\bar{f}(|Q_1''|,s_2;M)\right)\leq$$
$$\leq 16\frac{\tau_1}{s_1}\bar{f}(\tau_1,s_2;M).$$

Аналогично имеем и в случае $|Q_1| = s_1 \leq \tau_1$, $|Q_2| = s_2 > \tau_2$

$$\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} f_{00}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| \leq 16\frac{\tau_2}{s_2}\bar{f}(s_1,\tau_2;M).$$

Пусть $|Q_1| = s_1 > \tau_1$, $|Q_2| = s_2 > \tau_2$. Применяя лемму 1.5 и лемму 1.6, получим

$$\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} f_{00}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left(\left|\int\limits_{Q_2'}\int\limits_{Q_1'} f_{00}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| + \left|\int\limits_{Q_2''}\int\limits_{Q_1'} f_{00}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right|\right.$$
$$\left. + \left|\int\limits_{Q_2'}\int\limits_{Q_1''} f_{00}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| + \left|\int\limits_{Q_2''}\int\limits_{Q_1''} f_{00}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right|\right),$$

где $\tau_i \leq |Q_i'| \leq 2\tau_i, \tau_i \leq |Q_i''| \leq 2\tau_i$, $i = 1, 2$.

Таким образом, используя оценку (15) к каждому слагаемому имеем

$$\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} f_{00}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| \leq 64\frac{\tau_1}{s_1}\frac{\tau_2}{s_2}\bar{f}(\tau_1,\tau_2;M).$$

Напомним определение усреднения функции $f_{00}(x_1, x_2)$ по сети M:

$$\bar{f}(t_1,t_2;M) = \sup_{|Q_i|\geq t_i}\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} f_{00}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right|.$$

Пусть $t_1 > \tau_1$, $t_2 > \tau_2$, тогда учитывая (13), получим

$$\bar{f}_{00}(t_1,t_2;M) = \sup_{|Q_i|\geq t_i}\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} f_{00}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| \leq$$
$$\leq \sup_{\substack{s_1\geq t_1\\ s_2\geq t_2}} 64\frac{\tau_1}{s_1}\frac{\tau_2}{s_2}\bar{f}(\tau_1,\tau_2;M) \leq 64\frac{\tau_1}{t_1}\frac{\tau_2}{t_2}\bar{f}(\tau_1,\tau_2;M).$$

Пусть $t_1 > \tau_1$, $t_2 \le \tau_2$, здесь возможны два случая: $|Q_1| = s_1 > \tau_1$, $|Q_2| = s_2 > \tau_2$ и $s_1 > \tau_1$, $t_2 < s_2 \le \tau_2$.

Если $s_1 > \tau_1$, $s_2 > \tau_2$, то мы используем оценку (13) и учитывая, что $t_2 \le \tau_2$, имеем

$$\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} f_{00}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| \le 64\frac{\tau_1}{s_1}\frac{\tau_2}{s_2}\bar{f}(\tau_1,\tau_2;M) \le 64\frac{\tau_1}{t_1}\bar{f}(\tau_1,t_2;M).$$

Если $s_1 > \tau_1$, $s_2 < \tau_2$, то

$$\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} f_{00}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| \le 16\frac{\tau_1}{s_1}\bar{f}(\tau_1,s_2;M) \le 16\frac{\tau_1}{t_1}\bar{f}(\tau_1,t_2;M).$$

Таким образом,

$$\bar{f}_{00}(t_1,t_2;M) \le 16\frac{\tau_1}{t_1}\bar{f}(\tau_1,t_2;M).$$

Аналогично получаем оценку

$$\bar{f}_{00}(t_1,t_2;M) \le 64\frac{\tau_2}{t_2}\bar{f}(t_1,\tau_2;M),$$

при $t_1 \le \tau_1$ $t_2 > \tau_2$.

При $t_1 \le \tau_1$ $t_2 \le \tau_2$ возможны 4 случая: $\begin{cases} s_1 > \tau_1 \\ s_2 > \tau_2 \end{cases}$, $\begin{cases} s_1 > \tau_1 \\ s_2 < \tau_2 \end{cases}$, $\begin{cases} s_1 < \tau_1 \\ s_2 > \tau_2 \end{cases}$, $\begin{cases} s_1 < \tau_1 \\ s_2 < \tau_2 \end{cases}$.

В первом случае используем первое соотношение из (13), во втором – первое и второе соотношение из (13), в третьем - первое и третье и в четвертом все соотношения из (13), тогда имеем

$$\bar{f}_{00}(t_1,t_2;M) \le 64\bar{f}(t_1,t_2;M).$$

Лемма 1.8. *Пусть G_τ- разбиение $\mathbb{R}^2$ на прямоугольники, $f(x_1,x_2)$ – локально интегрируема на $\mathbb{R}^2$ и функции f_{01}, f_{10} определены равенствами (8) и (9) соответственно. Тогда*

$$
\bar{f}_{01}(t_1,t_2;M) \le \begin{cases} 8\frac{\tau_1}{t_1}\left[3\bar{f}(\tau_1,t_2;M)+4\frac{\tau_2}{t_2}\bar{f}(\tau_1,\tau_2;M)\right], & t_1>\tau_1, t_2>\tau_2 \\ 56\frac{\tau_1}{t_1}\bar{f}(\tau_1,\tau_2;M), & t_1>\tau_1, t_2\le\tau_2 \\ 8\left[3\bar{f}(t_1,t_2;M)+4\frac{\tau_2}{t_2}\bar{f}(t_1,\tau_2;M)\right], & t_1\le\tau_1, t_2>\tau_2 \\ 56\bar{f}(t_1,\tau_2;M), & t_1\le\tau_1, t_2\le\tau_2 \end{cases} \tag{16}
$$

$$
\bar{f}_{10}(t_1,t_2;M) \le \begin{cases} 8\frac{\tau_2}{t_2}\left[3\bar{f}(t_1,\tau_2;M)+4\frac{\tau_1}{t_1}\bar{f}(\tau_1,\tau_2;M)\right], & t_1>\tau_1, t_2>\tau_2 \\ 8\left[3\bar{f}(t_1,t_2;M)+4\frac{\tau_1}{t_1}\bar{f}(\tau_1,t_2;M)\right], & t_1>\tau_1, t_2\le\tau_2 \\ 56\frac{\tau_2}{t_2}\bar{f}(\tau_1,\tau_2;M), & t_1\le\tau_1, t_2>\tau_2 \\ 56\bar{f}(\tau_1,t_2;M), & t_1\le\tau_1, t_2\le\tau_2 \end{cases}
$$

Доказательство. Пусть $|Q_1| = s_1$, $|Q_2| = s_2$. Докажем неравенство

$$
\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} f_{01}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| \le
$$

$$
\le \begin{cases} 8\frac{\tau_1}{s_1}\left[3\bar{f}(\tau_1,s_2;M)+4\frac{\tau_2}{s_2}\bar{f}(\tau_1,\tau_2;M)\right], & s_1>\tau_1, s_2>\tau_2 \\ 8\frac{\tau_1}{s_1}\bar{f}(\tau_1,\tau_2;M), & s_1>\tau_1, s_2\le\tau_2 \\ 2\left[3\bar{f}(s_1,s_2;M)+4\frac{\tau_2}{s_2}\bar{f}(s_1,\tau_2;M)\right], & s_1\le\tau_1, s_2>\tau_2 \\ 2\bar{f}(s_1,\tau_2;M), & s_1\le\tau_1, s_2\le\tau_2 \end{cases} \tag{17}
$$

Рассмотрим случай, когда $|Q_1| = s_1 \le \tau_1$, $|Q_2| = s_2 \le \tau_2$. Воспользуемся соотношением (14), где встречаются нужные слагаемые и применим соответствующие их оценки в (15):

$$
\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} f_{01}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| \le
$$

$$
\le \left|\frac{1}{|Q_1|}\sum_{|I_m^2\cap Q_2|>0}\frac{|I_m^2\cap Q_2|}{|I_m^2||Q_2|}\int\limits_{Q_1}\int\limits_{I_m^2} f(x_1,x_2)dx_2dx_1\right| +
$$

$$+\left|\sum_{|I_k^1\cap Q_1|>0}\sum_{|I_m^2\cap Q_2|>0}\frac{|I_k^1\cap Q_1||I_m^2\cap Q_2|}{|I_k^1||I_m^2||Q_1||Q_2|}\int\limits_{I_k^1}\int\limits_{I_m^2} f(x_1,x_2)dx_2dx_1\right|\le$$

$$\le \bar{f}(s_1,\tau_2;M)+\bar{f}(\tau_1,\tau_2;M) \qquad (18)$$

Тогда получим

$$\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} f_{01}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right|\le 2\bar{f}(s_1,\tau_2;M).$$

При $s_1=|Q_1|>\tau_1$, $s_2=|Q_2|\le\tau_2$ согласно лемме 1.6 имеем

$$\int\limits_{I_k^1} f_{01}(x_1,x_2)dx_1=0$$

Используя лемму 1.5, получим:

$$\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} f_{01}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right|\le$$
$$\le\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left(\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1'} f_{01}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right|+\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1''} f_{01}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right|\right)=$$
$$=\frac{|Q_1'|}{|Q_1|}\frac{1}{|Q_1'||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1'} f_{01}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right|+$$
$$+\frac{|Q_1''|}{|Q_1|}\frac{1}{|Q_1''||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1''} f_{01}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right|.$$

Применяя к каждому слагаемому соотношение (18), получим:

$$\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} f_{01}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right|\le$$

$$\leq \frac{2\tau_1}{s_1}\left(2\bar{f}(|Q_1'|,\tau_2;M)+2\bar{f}(|Q_1''|,\tau_2;M)\right)\leq 8\frac{\tau_1}{s_1}\bar{f}(\tau_1,\tau_2;M),$$

где $\tau_1 \leq |Q_1'| \leq 2\tau_1$, $\tau_1 \leq |Q_1''| \leq 2\tau_1$.

В случае, когда $|Q_1| = s_1 \leq \tau_1$, $|Q_2| = s_2 > \tau_2$ применим лемму 1.4, тогда:

$$\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} f_{01}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left(\left|\int\limits_{Q_2'}\int\limits_{Q_1} f_{01}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| + \left|\int\limits_{Q_2''}\int\limits_{Q_1} f_{01}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| + \left|\int\limits_{Q_2'''}\int\limits_{Q_1} f_{01}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right|\right).$$

Оценим первые два слагаемые:

$$\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left(\left|\int\limits_{Q_2'}\int\limits_{Q_1} f_{01}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| + \left|\int\limits_{Q_2''}\int\limits_{Q_1} f_{01}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right|\right) \leq$$

$$\leq 4\frac{\tau_2}{s_2}\bar{f}(s_1,\tau_2;M) + 4\frac{\tau_2}{s_2}\bar{f}(s_1,\tau_2;M) = 8\frac{\tau_2}{s_2}\bar{f}(s_1,\tau_2;M).$$

Оценивая третье слагаемое, получим:

$$\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2'''}\int\limits_{Q_1} f_{01}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| \leq \frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2'''}\int\limits_{Q_1} f(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| +$$

$$+\left|\sum_{|I_k^1\cap Q_1|>0}\frac{|I_k^1\cap Q_1|}{|Q_1||Q_2||I_k^1|}\int\limits_{Q_2'''}\int\limits_{I_k^1} f(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| \leq$$

$$\leq 3\bar{f}(s_1,s_2;M) + 3\bar{f}(\tau_1,s_2;M) \leq 6\bar{f}(s_1,s_2;M).$$

Суммируя результаты, получим:

$$\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int_{Q_2}\int_{Q_1} f_{01}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| \leq 2\left[3\bar{f}(s_1,s_2;M) + 4\frac{\tau_2}{s_2}\bar{f}(s_1,\tau_2;M)\right]. \quad (19)$$

В случае, когда $|Q_1| = s_1 > \tau_1$, $|Q_2| = s_2 > \tau_2$ применим лемму 1.5, тогда:

$$\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} f_{01}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left(\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1'} f_{01}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| + \left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1''} f_{01}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right|\right) =$$

$$= \frac{|Q_1'|}{|Q_1|}\frac{1}{|Q_1'||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1'} f_{01}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| +$$

$$+ \frac{|Q_1''|}{|Q_1|}\frac{1}{|Q_1''||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1''} f_{01}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right|.$$

Применяя оценку (19) при $|Q_1| = s_1 \leq \tau_1$, $|Q_2| = s_2 > \tau_2$, получим:

$$\frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} f_{01}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| \leq 8\frac{\tau_1}{s_1}\left[3\bar{f}(\tau_1,s_2;M) + 4\frac{\tau_2}{s_2}\bar{f}(\tau_1,\tau_2;M)\right].$$

Доказательство (16) следует из (17) так же как и оценка (12) следует из (13) в лемме 1.7. В силу симметрии, оценка функции $\bar{f}_{10}(t_1,t_2;M)$ получается аналогично оценке функции $\bar{f}_{01}(t_1,t_2;M)$.

Лемма доказана.

Лемма 1.9. *Пусть G_τ- разбиение $\mathbb{R}^2$ на прямоугольники, $f(x_1,x_2)$ – локально интегрируема на $\mathbb{R}^2$ и функция f_{11} определена равенством (10). Тогда*

$$\bar{f}_{11}(t_1,t_2;M) \leq 4\bar{f}(max(t_1,\tau_1),\, max(t_2,\tau_2)).$$

Доказательство:

$$I = \frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} f_{11}(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| =$$

$$= \left|\sum_{|I_k^1\cap Q_1|\neq\emptyset}\ \sum_{|I_m^2\cap Q_2|\neq\emptyset} \frac{|I_k^1\cap Q_1||I_m^2\cap Q_2|}{|I_k^1||I_m^2||Q_1||Q_2|}\int\limits_{I_m^2}\int\limits_{I_k^1} f(x_1',x_2')dx_1'dx_2'\right|.$$

Так как $|I_m^2 \cap Q_2| \leq min(s_2, \tau_2)$ и $\left|I_k^1 \cap Q_1\right| \leq min(s_1, \tau_1)$, то

$$\frac{|I_m^2 \cap Q_2|\left|I_k^1 \cap Q_1\right|}{\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot s_1 \cdot s_2} \leq \frac{1}{max(s_1, \tau_1),\ max(s_2, \tau_2)}.$$

Тогда

$$I = \frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} f_{11}(x_1, x_2)dx_1dx_2\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{max(s_1, \tau_1),\ max(s_2, \tau_2)}\left|\sum_{|I_k^1 \cap Q_1| \neq \emptyset}\ \sum_{|I_m^2 \cap Q_2| \neq \emptyset}\ \int\limits_{I_m^2}\int\limits_{I_k^1} f(x_1', x_2')dx_1'dx_2'\right| =$$

$$= \frac{1}{max(s_1, \tau_1),\ max(s_2, \tau_2)}\left|\int\limits_{\tilde{Q}_2}\int\limits_{\tilde{Q}_1} f(x_1', x_2')dx_1'dx_2'\right|,$$

здесь $\tilde{Q}_1 = \bigcup_{I_k^1 \cap Q_1 \neq \emptyset} I_k^1$, $\tilde{Q}_2 = \bigcup_{I_m^2 \cap Q_2 \neq \emptyset} I_m^2$ - отрезки, причем такие, что $max(s_i, \tau_i) \leq$ $Qi\leq 2maxsi,\tau i$. Следовательно:

$$|I| \leq \frac{\left|\tilde{Q}_1\right|\left|\tilde{Q}_2\right|}{max(s_1, \tau_1),\ max(s_2, \tau_2)}\bar{f}(max(s_1, \tau_1),\ max(s_2, \tau_2)) \leq$$

$$\leq 4\bar{f}(max(s_1, \tau_1),\ max(s_2, \tau_2)).$$

Далее,

$$\bar{f}_{11}(t_1, t_2; M) = \sup_{|Q_i| \geq t_i} \frac{1}{|Q_1||Q_2|}\left|\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} f_{11}(x_1, x_2)dx_1dx_2\right| \leq$$

$$\leq 4\bar{f}(max(t_1, \tau_1),\ max(t_2, \tau_2)).$$

Лемма 1.9 доказана.

1.3 Интерполяционная теорема

Поясним, что неравенство векторов понимается как неравенство соответствующих координат, т.е. если $\bar{p} = (p_1, p_2) > \bar{q} = (q_1, q_2)$, то это означает, что $p_1 > q_1, p_2 > q_2$.

Теорема 1.3. *Пусть* M - *множество всех прямоугольников в* $\mathbb{R}^2$, $0<\bar{p}_0=(p_1^0,p_2^0)<\bar{p}=(p_1,p_2)<\bar{p}_1=(p_1^1,p_2^1)\leq\infty$, $1\leq\bar{q}_0=(q_1^0,q_2^0),\bar{q}=(q_1,q_2),\bar{q}_1=(q_1^1,q_2^1)\leq\infty$, $\bar{p}_\varepsilon=\left(p_1^{\varepsilon_1},p_2^{\varepsilon_2}\right)$, $\bar{q}_\varepsilon=\left(q_1^{\varepsilon_1},q_2^{\varepsilon_2}\right)$, $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in E$, $E=\{\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2):\varepsilon_i=$ *0 или εi=1, i=1,2, 0<θ=θ1, θ2<1, тогда*

$$\left(N_{\bar{p}_\varepsilon,\bar{q}_\varepsilon}(M),\varepsilon\in E\right)_{\bar{\theta},\bar{q}}=N_{\bar{p},\bar{q}}(M),\qquad \frac{1}{\bar{p}}=\frac{1-\bar{\theta}}{\bar{p}_0}+\frac{\bar{\theta}}{\bar{p}_1}.$$

Доказательство. Докажем вложение

$$N_{\bar{p},\bar{q}}(M)\hookrightarrow\left(N_{\bar{p}_0,\bar{q}_0}(M),N_{\bar{p}_1,\bar{q}_1}(M)\right)_{\bar{\theta},\bar{q}}.$$

Пусть $\bar{v}=(v,v)$, где $v=min(q_1^0,q_2^0,q_1^1,q_2^1)$то из вложений $N_{\bar{p}_0,\bar{v}}(M)\hookrightarrow N_{\bar{p}_0,\bar{q}_0}(M)$, $N_{\bar{p}_1,\bar{v}}(M)\hookrightarrow N_{\bar{p}_1,\bar{q}_1}(M)$ достаточно доказать следующее вложение:

$$N_{\bar{p},\bar{q}}(M)\hookrightarrow\left(N_{\bar{p}_0,\bar{v}}(M),N_{\bar{p}_1,\bar{v}}(M)\right)_{\bar{\theta},\bar{q}}.$$

Пусть $f\in N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$, f_{00} определяется формулой (8). Тогда, для любых фиксированных $\tau_1,\tau_2>0$, используя лемму 1.7 получим:

$$\|f_{00}\|_{N_{\left(p_1^0,p_2^0\right),(v,v)}}=\left(\int_0^\infty\int_0^\infty\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}_{00}(t_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}=$$

$$=\left(\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}_{00}(t_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+$$

$$+\left(\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^\infty\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}_{00}(t_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+$$

$$+\left(\int_{\tau_2}^\infty\int_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}_{00}(t_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+$$

$$+\left(\int_{\tau_2}^\infty\int_{\tau_1}^\infty\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}_{00}(t_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}\leq$$

$$\leq 64\left(\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(t_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+$$

$$+64\left(\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{\infty}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\frac{\tau_1}{t_1}\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+$$

$$+64\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\int_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\frac{\tau_2}{t_2}\bar{f}(t_1,\tau_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+$$

$$+64\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\int_{\tau_1}^{\infty}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\frac{\tau_1\tau_2}{t_1t_2}\bar{f}(\tau_1,\tau_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} = I_1+I_2+I_3+I_4;$$

$$I_1 = 64\left(\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(t_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}};$$

$$I_2 = 64\left(\int_0^{\tau_2}\left(t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\tau_1\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^v\left(\int_{\tau_1}^{\infty}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}-1}\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\right)\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} =$$

$$= 64\left(\frac{\tau_1^{\frac{v}{p_1^0}}}{v\left(1-\frac{1}{p_1^0}\right)}\int_0^{\tau_2}\left(t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^v\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} =$$

$$= \frac{64\cdot\tau_1^{\frac{1}{p_1^0}}}{v^{\frac{1}{v}}\left(1-\frac{1}{p_1^0}\right)^{\frac{1}{v}}}\left(\int_0^{\tau_2}\left(t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^v\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} =$$

$$= \frac{64}{v^{\frac{1}{v}}\left(1-\frac{1}{p_1^0}\right)^{\frac{1}{v}}}\cdot\tau_1^{\frac{1}{p_1^0}}\left(\int_0^{\tau_2}\left(t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^v\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}$$

$$I_3=64\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\int_{0}^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\frac{\tau_2}{t_2}\bar{f}(t_1,\tau_2)\right)^{v}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}=$$

$$=64\tau_2\left(\int_{0}^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}\bar{f}(t_1,\tau_2)\right)^{v}\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\left(t_2^{\frac{1}{p_2^0}-1}\right)^{v}\frac{dt_2}{t_2}\right)\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{v}}=$$

$$=64\tau_2\left(\int_{0}^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}\bar{f}(t_1,\tau_2)\right)^{v}\frac{\tau_2^{v\left(\frac{1}{p_2^0}-1\right)}}{v\left(1-\frac{1}{p_2^0}\right)}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{v}}=$$

$$=\frac{64}{v^{\frac{1}{v}}\left(1-\frac{1}{p_2^0}\right)^{\frac{1}{v}}}\cdot\tau_2^{\frac{1}{p_2^0}}\left(\int_{0}^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}\bar{f}(t_1,\tau_2)\right)^{v}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{v}}=$$

$$I_4=64\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\int_{\tau_1}^{\infty}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\frac{\tau_1\tau_2}{t_1t_2}\bar{f}(\tau_1,\tau_2)\right)^{v}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}$$

$$=64\tau_1\tau_2\bar{f}(\tau_1,\tau_2)\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\left(t_2^{\frac{1}{p_2^0}-1}\right)^{v}\frac{dt_2}{t_2}\int_{\tau_1}^{\infty}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}-1}\right)^{v}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{v}}$$

$$=64\tau_1\tau_2\bar{f}(\tau_1,\tau_2)\frac{\tau_2^{\frac{1}{p_2^0}-1}}{v^{\frac{1}{v}}\left(1-\frac{1}{p_2^0}\right)^{\frac{1}{v}}}\cdot\frac{\tau_1^{\frac{1}{p_1^0}-1}}{v^{\frac{1}{v}}\left(1-\frac{1}{p_1^0}\right)^{\frac{1}{v}}}=$$

$$=\frac{64}{v^{\frac{2}{v}}\left(1-\frac{1}{p_2^0}\right)^{\frac{1}{v}}\left(1-\frac{1}{p_1^0}\right)^{\frac{1}{v}}}\tau_2^{\frac{1}{p_2^0}}\tau_1^{\frac{1}{p_1^0}}\bar{f}(\tau_1,\tau_2).$$

$$\|f_{00}\|_{N_{\left(p_1^0,p_2^0\right),(v,v)}}\leq I_1+I_2+I_3+I_4=$$

$$=64\left(\int_{0}^{\tau_2}\int_{0}^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(t_1,t_2)\right)^{v}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+$$

$$+\frac{64}{v^{\frac{1}{v}}\left(1-\frac{1}{p_1^0}\right)^{\frac{1}{v}}}\cdot\tau_1^{\frac{1}{p_1^0}}\left(\int_0^{\tau_2}\left(t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^v\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+$$

$$+\frac{64}{v^{\frac{1}{v}}\left(1-\frac{1}{p_2^0}\right)^{\frac{1}{v}}}\cdot\tau_2^{\frac{1}{p_2^0}}\left(\int_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}\bar{f}(t_1,\tau_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{v}}+$$

$$+\frac{64}{v^{\frac{2}{v}}\left(1-\frac{1}{p_2^0}\right)^{\frac{1}{v}}\left(1-\frac{1}{p_1^0}\right)^{\frac{1}{v}}}\tau_2^{\frac{1}{p_2^0}}\tau_1^{\frac{1}{p_1^0}}\bar{f}(\tau_1,\tau_2).$$

Таким образом:

$$\|f_{00}\|_{N_{\left(p_1^0,p_2^0\right),(v,v)}}\leq \mathrm{C}_{00}\left(\left(\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(t_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+\right.$$

$$+\tau_1^{\frac{1}{p_1^0}}\left(\int_0^{\tau_2}\left(t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^v\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+\tau_2^{\frac{1}{p_2^0}}\left(\int_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}\bar{f}(t_1,\tau_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{v}}$$

$$\left.+\tau_1^{\frac{1}{p_1^0}}\tau_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(\tau_1,\tau_2)\right).$$

Пусть $f\in N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$, f_{01},f_{10} определяются формулами (8), (9). В этом случае, для любых фиксированных $\tau_1,\tau_2>0$, применив лемму 1.8, получим:

$$\|f_{01}\|_{N_{\left(p_1^0,p_2^1\right),(v,v)}}=\left(\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}_{01}(t_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}=$$

$$= \left(\int_0^{\tau_2} \int_0^{\tau_1} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}} t_2^{\frac{1}{p_2^1}} \bar{f}_{01}(t_1, t_2) \right)^v \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{v}} +$$

$$+ \left(\int_0^{\tau_2} \int_{\tau_1}^{\infty} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}} t_2^{\frac{1}{p_2^1}} \bar{f}_{01}(t_1, t_2) \right)^v \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{v}} +$$

$$+ \left(\int_{\tau_2}^{\infty} \int_0^{\tau_1} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}} t_2^{\frac{1}{p_2^1}} \bar{f}_{01}(t_1, t_2) \right)^v \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{v}} +$$

$$+ \left(\int_{\tau_2}^{\infty} \int_{\tau_1}^{\infty} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}} t_2^{\frac{1}{p_2^1}} \bar{f}_{01}(t_1, t_2) \right)^v \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{v}} \leq$$

$$\leq 56 \left(\int_0^{\tau_2} \int_0^{\tau_1} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}} t_2^{\frac{1}{p_2^1}} \bar{f}(t_1, \tau_2) \right)^v \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{v}} +$$

$$+56 \left(\int_0^{\tau_2} \int_{\tau_1}^{\infty} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}} t_2^{\frac{1}{p_2^1}} \frac{\tau_1}{t_1} \bar{f}(\tau_1, \tau_2) \right)^v \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{v}} +$$

$$+8 \left(\int_{\tau_2}^{\infty} \int_0^{\tau_1} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}} t_2^{\frac{1}{p_2^1}} \left(3\bar{f}(t_1, t_2) + 4 \frac{\tau_2}{t_2} \bar{f}(t_1, \tau_2) \right) \right)^v \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{v}} +$$

$$+8 \left(\int_{\tau_2}^{\infty} \int_{\tau_1}^{\infty} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}} t_2^{\frac{1}{p_2^1}} \frac{\tau_1}{t_1} \left(3\bar{f}(\tau_1, t_2) + 4 \frac{\tau_2}{t_2} \bar{f}(\tau_1, \tau_2) \right) \right)^v \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{v}} =$$

$$= L_1 + L_2 + L_3 + L_4;$$

$$L_1 = 56 \left(\int_0^{\tau_2} \int_0^{\tau_1} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}} t_2^{\frac{1}{p_2^1}} \bar{f}(t_1, \tau_2) \right)^v \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{v}} =$$

$$= 56 \left(\frac{p_2^1}{v} \right)^{\frac{1}{v}} \cdot \tau_2^{\frac{1}{p_2^1}} \left(\int_0^{\tau_1} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}} \bar{f}(t_1, \tau_2) \right)^v \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{1}{v}}$$

$$L_2 = 56\left(\int\limits_0^{\tau_2}\int\limits_{\tau_1}^{\infty}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}} t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\frac{\tau_1}{t_1}\bar{f}(\tau_1,\tau_2)\right)^v \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} =$$

$$= 56\tau_1\bar{f}(\tau_1,\tau_2)\left(\int\limits_0^{\tau_2} t_2^{\frac{v}{p_2^1}-1}\, dt_2 \int\limits_{\tau_1}^{\infty}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}-1}\right)^v \frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{v}} =$$

$$= \frac{56}{\left(\frac{v^2}{p_2^1}\left(1-\frac{1}{p_1^0}\right)\right)^{\frac{1}{v}}}\tau_1^{\frac{1}{p_1^0}}\tau_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}(\tau_1,\tau_2);$$

$$L_3 = 8\left(\int\limits_{\tau_2}^{\infty}\int\limits_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}} t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\left(3\bar{f}(t_1,t_2)+4\frac{\tau_2}{t_2}\bar{f}(t_1,\tau_2)\right)\right)^v \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} \leq$$

$$\leq 24\left(\int\limits_{\tau_2}^{\infty}\int\limits_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}} t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}(t_1,t_2)\right)^v \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} +$$

$$+32\tau_2\left(\int\limits_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}\bar{f}(t_1,\tau_2)\right)^v \left(\int\limits_{\tau_2}^{\infty} t_2^{v\left(\frac{1}{p_2^1}-1\right)}\frac{dt_2}{t_2}\right)\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{v}} =$$

$$= 24\left(\int\limits_{\tau_2}^{\infty}\int\limits_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}} t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}(t_1,t_2)\right)^v \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} +$$

$$+\frac{32}{\left(v\left(1-\frac{1}{p_2^1}\right)\right)^{\frac{1}{v}}}\cdot\tau_2^{\frac{1}{p_2^1}}\left(\int\limits_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}\bar{f}(t_1,\tau_2)\right)^v \frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{v}};$$

$$L_4 = 8\left(\int\limits_{\tau_2}^{\infty}\int\limits_{\tau_1}^{\infty}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}} t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\frac{\tau_1}{t_1}\left(3\bar{f}(\tau_1,t_2)+4\frac{\tau_2}{t_2}\bar{f}(\tau_1,\tau_2)\right)\right)^v \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} \leq$$

$$\leq 24\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\int_{\tau_1}^{\infty}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\frac{\tau_1}{t_1}\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+$$

$$+32\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\int_{\tau_1}^{\infty}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\frac{\tau_1}{t_1}\frac{\tau_2}{t_2}\bar{f}(\tau_1,\tau_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}=$$

$$=24\tau_1\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\left(t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^v\left(\int_{\tau_1}^{\infty}t_1^{\,v\left(\frac{1}{p_1^0}-1\right)}\frac{dt_1}{t_1}\right)\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+$$

$$+32\bar{f}(\tau_1,\tau_2)\tau_1\tau_2\left(\int_{\tau_2}^{\infty}t_2^{\,v\left(\frac{1}{p_2^1}-1\right)}\frac{dt_2}{t_2}\int_{\tau_1}^{\infty}t_1^{\,v\left(\frac{1}{p_1^0}-1\right)}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{v}}=$$

$$=\frac{24\tau_1^{\frac{1}{p_1^0}}}{\left(v\left(1-\frac{1}{p_1^0}\right)\right)^{\frac{1}{v}}}\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\left(t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^v\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+\frac{32\tau_1^{\frac{1}{p_1^0}}\tau_2^{\frac{1}{p_2^1}}}{\left(v^2\left(1-\frac{1}{p_1^0}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^1}\right)\right)^{\frac{1}{v}}}\bar{f}(\tau_1,\tau_2)$$

$$\|f_{01}\|_{N_{\left(p_1^0,p_2^1\right),(v,v)}}\leq 56\left(\frac{p_2^1}{v}\right)^{\frac{1}{v}}\cdot\tau_2^{\frac{1}{p_2^1}}\left(\int_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}\bar{f}(t_1,\tau_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{v}}+$$

$$+\frac{56}{\left(\frac{v^2}{p_2^1}\left(1-\frac{1}{p_1^0}\right)\right)^{\frac{1}{v}}}\tau_1^{\frac{1}{p_1^0}}\tau_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}(\tau_1,\tau_2)+24\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\int_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}(t_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+$$

$$+\frac{32}{\left(v\left(1-\frac{1}{p_2^1}\right)\right)^{\frac{1}{v}}}\cdot\tau_2^{\frac{1}{p_2^1}}\left(\int_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}\bar{f}(t_1,\tau_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{v}}+$$

$$\frac{24\tau_1^{\frac{1}{p_1^0}}}{\left(v\left(1-\frac{1}{p_1^0}\right)\right)^{\frac{1}{v}}}\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\left(t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^v\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+\frac{32\tau_1^{\frac{1}{p_1^0}}\tau_2^{\frac{1}{p_2^1}}}{\left(v^2\left(1-\frac{1}{p_1^0}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^1}\right)\right)^{\frac{1}{v}}}\bar{f}(\tau_1,\tau_2)=$$

$$=24\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\int_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}(t_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+$$

$$+\frac{56(p_2^1-1)^{\frac{1}{v}}+32}{\left(\frac{v(p_2^1-1)}{p_2^1}\right)^{\frac{1}{v}}}\cdot\tau_2^{\frac{1}{p_2^1}}\left(\int_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}\bar{f}(t_1,\tau_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{v}}+$$

$$+\frac{24}{\left(v\left(\frac{p_1^0-1}{p_1^0}\right)\right)^{\frac{1}{v}}}\cdot\tau_1^{\frac{1}{p_1^0}}\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\left(t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^v\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+$$

$$\frac{56(p_2^1-1)^{\frac{1}{v}}+32}{\left(\frac{v^2(p_1^0-1)(p_2^1-1)}{p_1^0p_2^1}\right)^{\frac{1}{v}}}\cdot\tau_1^{\frac{1}{p_1^0}}\tau_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}(\tau_1,\tau_2);$$

$$\|f_{01}\|_{N_{\left(p_1^0,p_2^1\right),(v,v)}}\leq \mathrm{C}_{01}\left(\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\int_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}(t_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+\right.$$

$$+\tau_2^{\frac{1}{p_2^1}}\left(\int_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^0}}\bar{f}(t_1,\tau_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{v}}+\tau_1^{\frac{1}{p_1^0}}\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\left(t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^v\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}$$

$$\left.+\tau_1^{\frac{1}{p_1^0}}\tau_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}(\tau_1,\tau_2)\right)$$

$$\|f_{10}\|_{N_{(p_1^1,p_2^0),(v,v)}} = \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}} t_2^{\frac{1}{p_2^0}} \bar{f}_{10}(t_1,t_2)\right)^v \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} =$$

$$= \left(\int_0^{\tau_2} \int_0^{\tau_1} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}} t_2^{\frac{1}{p_2^0}} \bar{f}_{10}(t_1,t_2)\right)^v \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} +$$

$$+ \left(\int_0^{\tau_2} \int_{\tau_1}^{\infty} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}} t_2^{\frac{1}{p_2^0}} \bar{f}_{10}(t_1,t_2)\right)^v \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} +$$

$$+ \left(\int_{\tau_2}^{\infty} \int_0^{\tau_1} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}} t_2^{\frac{1}{p_2^0}} \bar{f}_{10}(t_1,t_2)\right)^v \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} +$$

$$+ \left(\int_{\tau_2}^{\infty} \int_{\tau_1}^{\infty} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}} t_2^{\frac{1}{p_2^0}} \bar{f}_{10}(t_1,t_2)\right)^v \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} \leq$$

$$\leq 56\left(\int_0^{\tau_2} \int_0^{\tau_1} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}} t_2^{\frac{1}{p_2^0}} \bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^v \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} +$$

$$+8\left(\int_0^{\tau_2} \int_{\tau_1}^{\infty} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}} t_2^{\frac{1}{p_2^0}} \left(3\bar{f}(t_1,t_2) + 4\frac{\tau_1}{t_1}\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)\right)^v \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} +$$

$$+56\tau_2\left(\int_{\tau_2}^{\infty} \int_0^{\tau_1} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}} t_2^{\frac{1}{p_2^0}-1} \bar{f}(\tau_1,\tau_2)\right)^v \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} +$$

$$+8\tau_2\left(\int_{\tau_2}^{\infty} \int_{\tau_1}^{\infty} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}} t_2^{\frac{1}{p_2^0}-1} \left(3\bar{f}(t_1,\tau_2) + 4\frac{\tau_1}{t_1}\bar{f}(\tau_1,\tau_2)\right)\right)^v \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} =$$

$$= H_1 + H_2 + H_3 + H_4$$

$$H_1 = 56\left(\int_0^{\tau_2} \int_0^{\tau_1} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}} t_2^{\frac{1}{p_2^0}} \bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^v \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} =$$

$$= 56\left(\int_0^{\tau_2}\left(t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^v\left(\int_0^{\tau_1} t_1^{\frac{v}{p_1^1}}\frac{dt_1}{t_1}\right)\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} = \frac{56\tau_1^{\frac{1}{p_1^1}}}{\left(\frac{v}{p_1^1}\right)^{\frac{1}{v}}}\left(\int_0^{\tau_2}\left(t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^v\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}};$$

$$H_2 = 8\left(\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{\infty}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}}t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\left(3\bar{f}(t_1,t_2)+4\frac{\tau_1}{t_1}\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} \leq$$

$$\leq 24\left(\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{\infty}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}}t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(t_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} +$$

$$+32\tau_1\left(\int_0^{\tau_2}\left(t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^v\left(\int_{\tau_1}^{\infty} t_1^{v\left(\frac{1}{p_1^1}-1\right)}\frac{dt_1}{t_1}\right)\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} =$$

$$= 24\left(\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{\infty}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}}t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(t_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} +$$

$$+32\frac{\tau_1^{\frac{1}{p_1^1}}}{\left(\frac{v(p_1^1-1)}{p_1^1}\right)^{\frac{1}{v}}}\left(\int_0^{\tau_2}\left(t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^v\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}};$$

$$H_3 = 56\tau_2\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\int_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}}t_2^{\frac{1}{p_2^0}-1}\bar{f}(\tau_1,\tau_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} = 56\frac{\tau_1^{\frac{1}{p_1^1}}\tau_2^{\frac{1}{p_2^0}}}{\left(\frac{v^2}{p_1^1}\left(1-\frac{1}{p_2^0}\right)\right)^{\frac{1}{v}}}\bar{f}(\tau_1,\tau_2) =$$

$$= \frac{56\tau_1^{\frac{1}{p_1^1}}\tau_2^{\frac{1}{p_2^0}}}{\left(\frac{v^2(p_2^0-1)}{p_1^1p_2^0}\right)^{\frac{1}{v}}}\bar{f}(\tau_1,\tau_2);$$

$$H_4 = 24\tau_2\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\int_{\tau_1}^{\infty}\left({t_1}^{\frac{1}{p_1^1}}{t_2}^{\frac{1}{p_2^0}-1}\bar{f}(t_1,\tau_2)\right)^{v}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}$$

$$+32\tau_1\tau_2\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\int_{\tau_1}^{\infty}\left({t_1}^{\frac{1}{p_1^1}-1}{t_2}^{\frac{1}{p_2^0}-1}\bar{f}(\tau_1,\tau_2)\right)^{v}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}$$

$$= \frac{24{\tau_2}^{\frac{1}{p_2^0}}}{\left(v\left(1-\frac{1}{p_2^0}\right)\right)^{\frac{1}{v}}}\left(\int_{\tau_1}^{\infty}\left({t_1}^{\frac{1}{p_1^1}}\bar{f}(t_1,\tau_2)\right)^{v}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{v}} + \frac{32{\tau_1}^{\frac{1}{p_1^1}}{\tau_2}^{\frac{1}{p_2^0}}}{\left(v^2\left(1-\frac{1}{p_1^1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^0}\right)\right)^{\frac{1}{v}}}\bar{f}(\tau_1,\tau_2) =$$

$$= \frac{24{\tau_2}^{\frac{1}{p_2^0}}}{\left(\frac{v(p_2^0-1)}{p_2^0}\right)^{\frac{1}{v}}}\left(\int_{\tau_1}^{\infty}\left({t_1}^{\frac{1}{p_1^1}}\bar{f}(t_1,\tau_2)\right)^{v}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{v}} + \frac{32{\tau_1}^{\frac{1}{p_1^1}}{\tau_2}^{\frac{1}{p_2^0}}}{\left(\frac{v^2(p_1^1-1)(p_2^0-1)}{p_1^1p_2^0}\right)^{\frac{1}{v}}}\bar{f}(\tau_1,\tau_2);$$

$$\|f_{10}\|_{N_{\left(p_1^1,p_2^0\right),(v,v)}} \le H_1+H_2+H_3+H_4 = \frac{56{\tau_1}^{\frac{1}{p_1^1}}}{\left(\frac{v}{p_1^1}\right)^{\frac{1}{v}}}\left(\int_{0}^{\tau_2}\left({t_2}^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^{v}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} +$$

$$+24\left(\int_{0}^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{\infty}\left({t_1}^{\frac{1}{p_1^1}}{t_2}^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(t_1,t_2)\right)^{v}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} +$$

$$+32\frac{{\tau_1}^{\frac{1}{p_1^1}}}{\left(\frac{v(p_1^1-1)}{p_1^1}\right)^{\frac{1}{v}}}\left(\int_{0}^{\tau_2}\left({t_2}^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^{v}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}} +$$

$$+\frac{56{\tau_1}^{\frac{1}{p_1^1}}{\tau_2}^{\frac{1}{p_2^0}}}{\left(\frac{v^2(p_2^0-1)}{p_1^1p_2^0}\right)^{\frac{1}{v}}}\bar{f}(\tau_1,\tau_2) + \frac{24{\tau_2}^{\frac{1}{p_2^0}}}{\left(\frac{v(p_2^0-1)}{p_2^0}\right)^{\frac{1}{v}}}\left(\int_{\tau_1}^{\infty}\left({t_1}^{\frac{1}{p_1^1}}\bar{f}(t_1,\tau_2)\right)^{v}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{v}} +$$

$$\frac{32\tau_1^{\frac{1}{p_1^1}}\tau_2^{\frac{1}{p_2^0}}}{\left(\frac{v^2(p_1^1-1)(p_2^0-1)}{p_1^1p_2^0}\right)^{\frac{1}{v}}}\bar{f}(\tau_1,\tau_2)=$$

$$=\frac{56(p_1^1-1)^{\frac{1}{v}}+32}{\left(\frac{v(p_1^1-1)}{p_1^1}\right)^{\frac{1}{v}}}\tau_1^{\frac{1}{p_1^1}}\left(\int_0^{\tau_2}\left(t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^v\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+$$

$$+24\left(\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{\infty}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}}t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(t_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+$$

$$+\frac{24\tau_2^{\frac{1}{p_2^0}}}{\left(\frac{v(p_2^0-1)}{p_2^0}\right)^{\frac{1}{v}}}\left(\int_{\tau_1}^{\infty}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}}\bar{f}(t_1,\tau_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{v}}+$$

$$+\frac{56(p_1^1-1)^{\frac{1}{v}}+32}{\left(\frac{v^2(p_1^1-1)(p_2^0-1)}{p_1^1p_2^0}\right)^{\frac{1}{v}}}\tau_1^{\frac{1}{p_1^1}}\tau_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(\tau_1,\tau_2).$$

$$\|f_{10}\|_{N_{\left(p_1^1,p_2^0\right),(v,v)}}\le C_{10}\left(\tau_1^{\frac{1}{p_1^1}}\left(\int_0^{\tau_2}\left(t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^v\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+\right.$$

$$+\left(\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{\infty}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}}t_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(t_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+\tau_2^{\frac{1}{p_2^0}}\left(\int_{\tau_1}^{\infty}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}}\bar{f}(t_1,\tau_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{v}}+$$

$$\left.+\tau_1^{\frac{1}{p_1^1}}\tau_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(\tau_1,\tau_2)\right).$$

И наконец, воспользовавшись леммой 1.9 для функции f_{11}, которая определяется формулой (10), имеем:

$$\|f_{11}\|_{N_{\left(p_1^1,p_2^1\right),(v,v)}}=\left(\int_0^\infty\int_0^\infty\left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}}t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}_{11}(t_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}=$$

$$=\left(\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}}t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}_{11}(t_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+$$

$$+\left(\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{\infty}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}}t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}_{11}(t_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+$$

$$+\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\int_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}}t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}_{11}(t_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+$$

$$+\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\int_{\tau_1}^{\infty}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}}t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}_{11}(t_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}\leq$$

$$\leq 4\left(\left(\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}}t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}(\tau_1,\tau_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+\left(\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{\infty}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}}t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}(t_1,\tau_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\int_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}}t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\int_{\tau_1}^{\infty}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}}t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}(t_1,t_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}\right)=$$

$$=4(G_1+G_2+G_3+G_4);$$

$$G_1=\left(\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}}t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}(\tau_1,\tau_2)\right)^v\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}=\bar{f}(\tau_1,\tau_2)\left(\int_0^{\tau_1}t_1^{\frac{v}{p_1^1}-1}\,dt_1\int_0^{\tau_2}t_2^{\frac{v}{p_2^1}-1}\,dt_2\right)^{\frac{1}{v}}$$

$$=\left(\frac{p_1^1p_2^1}{v^2}\right)^{\frac{1}{v}}\tau_1^{\frac{1}{p_1^1}}\tau_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}(\tau_1,\tau_2);$$

$$G_2 = \left(\int_0^{\tau_2} \int_{\tau_1}^{\infty} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}} t_2^{\frac{1}{p_2^1}} \bar{f}(t_1, \tau_2) \right)^v \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{v}} =$$

$$= \left(\int_{\tau_1}^{\infty} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}} \bar{f}(t_1, \tau_2) \right)^v \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{1}{v}} \left(\int_0^{\tau_2} t_2^{\frac{v}{p_2^1} - 1} dt_2 \right)^{\frac{1}{v}} =$$

$$= \left(\frac{p_2^1}{v} \right)^{\frac{1}{v}} \tau_2^{\frac{1}{p_2^1}} \left(\int_{\tau_1}^{\infty} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}} \bar{f}(t_1, \tau_2) \right)^v \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{1}{v}}$$

$$G_3 = \left(\int_{\tau_2}^{\infty} \int_0^{\tau_1} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}} t_2^{\frac{1}{p_2^1}} \bar{f}(\tau_1, t_2) \right)^v \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{v}} = \left(\frac{p_1^1}{v} \right)^{\frac{1}{v}} \tau_1^{\frac{1}{p_1^1}} \left(\int_{\tau_2}^{\infty} \left(t_2^{\frac{1}{p_2^1}} \bar{f}(\tau_1, t_2) \right)^v \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{v}}$$

$$G_4 = \left(\int_{\tau_2}^{\infty} \int_{\tau_1}^{\infty} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}} t_2^{\frac{1}{p_2^1}} \bar{f}(t_1, t_2) \right)^{\frac{1}{v}} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{v}};$$

$$\|f_{11}\|_{N_{\left(p_1^1, p_2^1\right), (v, v)}} \leq$$

$$\leq 4 \left(\left(\frac{p_1^1 p_2^1}{v^2} \right)^{\frac{1}{v}} \tau_1^{\frac{1}{p_1^1}} \tau_2^{\frac{1}{p_2^1}} \bar{f}(\tau_1, \tau_2) + \left(\frac{p_2^1}{v} \right)^{\frac{1}{v}} \tau_2^{\frac{1}{p_2^1}} \left(\int_{\tau_1}^{\infty} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}} \bar{f}(t_1, \tau_2) \right)^v \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{1}{v}} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{p_1^1}{v} \right)^{\frac{1}{v}} \tau_1^{\frac{1}{p_1^1}} \left(\int_{\tau_2}^{\infty} \left(t_2^{\frac{1}{p_2^1}} \bar{f}(\tau_1, t_2) \right)^v \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{v}} + \left(\int_{\tau_2}^{\infty} \int_{\tau_1}^{\infty} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}} t_2^{\frac{1}{p_2^1}} \bar{f}(t_1, t_2) \right)^{\frac{1}{v}} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{v}} \right)$$

$$\leq C_{11} \left(\tau_1^{\frac{1}{p_1^1}} \tau_2^{\frac{1}{p_2^1}} \bar{f}(\tau_1, \tau_2) + \tau_2^{\frac{1}{p_2^1}} \left(\int_{\tau_1}^{\infty} \left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}} \bar{f}(t_1, \tau_2) \right)^v \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{1}{v}} + \right.$$

$$+\tau_1^{\frac{1}{p_1^1}}\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\left(t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}(\tau_1,t_2)\right)^{v}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}+\left(\left(\int_{\tau_2}^{\infty}\int_{\tau_1}^{\infty}\left(t_1^{\frac{1}{p_1^1}}t_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}(t_1,t_2)\right)^{\frac{1}{v}}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{v}}\right).$$

Тогда

$$K(t_1,t_2,f)=K\left(t_1,t_2;\ N_{(p_1^0,p_2^0),(v,v)};\ N_{(p_1^0,p_2^1),(v,v)};\ N_{(p_1^1,p_2^0),(v,v)};\ N_{(p_1^1,p_2^1),(v,v)}\right)=$$
$$=\inf_{f=f_{00}+f_{01}+f_{10}+f_{11}}\left(\|f_{00}\|_{N_{\left(p_1^0,p_2^0\right),(v,v)}}+t_1\|f_{10}\|_{N_{\left(p_1^1,p_2^0\right),(v,v)}}+t_2\|f_{00}\|_{N_{\left(p_1^0,p_2^1\right),(v,v)}}+\right.$$
$$\left.+t_1t_2\|f_{11}\|_{N_{\left(p_1^1,p_2^1\right),(v,v)}}\right)\le I_{00}+I_{01}+I_{10}+I_{11};$$

$$F(K)=\left(\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\left(t_1^{-\theta_1}t_2^{-\theta_2}K(t_1,t_2)\right)^{q_1}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}\le$$
$$\le\left(2^{\left(\frac{1}{q_1}-1\right)_+}\right)\cdot\left(2^{\left(\frac{1}{q_2}-1\right)_+}\right)\left(F(I_{00})+F(I_{01})+F(I_{10})+F(I_{11})\right).$$

Далее, делаем замену

$$\tau_1=t_1^{\frac{1}{\frac{1}{p_1^0}-\frac{1}{p_1^1}}};\quad \tau_2=t_2^{\frac{1}{\frac{1}{p_2^0}-\frac{1}{p_2^1}}}$$

Учитывая, что $v\le q_j^i,\ i=0,1,\ j=1,2,$ применим неравенство Харди (см. лемму 1.3), получим

$$F(K)=\left(\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\left(t_1^{-\theta_1}t_2^{-\theta_2}K(t_1,t_2)\right)^{q_1}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{q_2}}\le \mathrm{C}\|f\|_{N_{\bar{p},\bar{q}}(M)}.$$

Для доказательства обратного вложения покажем, что

$$\left(N_{\bar{p}_\varepsilon,\bar{\infty}}(M),\varepsilon\in E\right)_{\bar{\theta},\bar{q}}\hookrightarrow N_{\bar{p},\bar{q}}(M)\qquad(20)$$

Пусть $\bar{\tau}=(\tau_1,\tau_2)$, где $\tau_i=t_i^{\frac{1}{\frac{1}{p_i^0}-\frac{1}{p_i^1}}}$, $0<t_i<\infty$, $E=\{\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2):\varepsilon_i=$ *0 или εi=1, i=1,2.*

Для функции $f\in\sum_{\varepsilon\in E}N_{\bar{p}_\varepsilon,\bar{\infty}}(M)$ рассмотрим произвольное представление:

$$f=\sum_{\varepsilon\in E}f_\varepsilon=f_{00}+f_{10}+f_{01}+f_{11},\qquad f_\varepsilon\in N_{\bar{p}_\varepsilon,\bar{\infty}}(M).$$

Учитывая свойства усреднения по сети M

$$\overline{f_{00}+f_{10}+f_{01}+f_{11}}(t_1,t_2;M)\le$$
$$\le\bar{f}_{00}(t_1,t_2;M)+\bar{f}_{10}(t_1,t_2;M)+\bar{f}_{01}(t_1,t_2;M)+\bar{f}_{11}(t_1,t_2;M),$$

получим:

$$\sup_{\tau_i\ge s_i>0}s_1^{\frac{1}{p_1^0}}s_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(s_1,s_2;M)\le\sup_{\tau_i\ge s_i>0}s_1^{\frac{1}{p_1^0}}s_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}_{00}(s_1,s_2;M)+$$
$$+\sup_{\tau_i\ge s_i>0}s_1^{\frac{1}{p_1^0}}s_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}_{10}(s_1,s_2;M)+\sup_{\tau_i\ge s_i>0}s_1^{\frac{1}{p_1^0}}s_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}_{01}(s_1,s_2;M)+$$
$$+\sup_{\tau_i\ge s_i>0}s_1^{\frac{1}{p_1^0}}s_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}_{11}(s_1,s_2;M)=\sup_{\tau_i\ge s_i>0}s_1^{\frac{1}{p_1^0}}s_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}_{00}(s_1,s_2;M)+$$
$$+\sup_{\tau_i\ge s_i>0}s_1^{\frac{1}{p_1^0}-\frac{1}{p_1^1}+\frac{1}{p_1^1}}s_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}_{10}(s_1,s_2;M)+\sup_{\tau_i\ge s_i>0}s_1^{\frac{1}{p_1^0}}s_2^{\frac{1}{p_2^0}-\frac{1}{p_2^1}+\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}_{01}(s_1,s_2;M)+$$
$$+\sup_{\tau_i\ge s_i>0}s_1^{\frac{1}{p_1^0}-\frac{1}{p_1^1}+\frac{1}{p_1^1}}s_2^{\frac{1}{p_2^0}-\frac{1}{p_2^1}+\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}_{11}(s_1,s_2;M)\le\sup_{\tau_i\ge s_i>0}s_1^{\frac{1}{p_1^0}}s_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}_{00}(s_1,s_2;M)+$$
$$+t_1\sup_{s_i>0}s_1^{\frac{1}{p_1^1}}s_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}_{10}(s_1,s_2;M)+t_2\sup_{s_i>0}s_1^{\frac{1}{p_1^0}}s_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}_{01}(s_1,s_2;M)+$$
$$+t_1t_2\sup_{s_i>0}s_1^{\frac{1}{p_1^1}}s_2^{\frac{1}{p_2^1}}\bar{f}_{11}(s_1,s_2;M).$$

Из произвольности представления $f=\sum_{\varepsilon\in E}f_\varepsilon$ имеем:

$$\sup_{\tau_i\ge s_i>0}s_1^{\frac{1}{p_1^0}}s_2^{\frac{1}{p_2^0}}\bar{f}(s_1,s_2;M)\le$$
$$\le K\left(t_1,t_2,f;N_{(p_1^0,p_2^0),(\infty,\infty)};N_{(p_1^0,p_2^1),(\infty,\infty)};N_{(p_1^1,p_2^0),(\infty,\infty)};N_{(p_1^1,p_2^1),(\infty,\infty)}\right),\qquad(21)$$

тогда

$$\|f\|_{N_{\overline{p},\overline{q}}(M)} = \left\| t_1^{\frac{1}{p_1}} t_2^{\frac{1}{p_2}} \overline{f}(t_1, t_2; M) \right\|_{L_{\overline{q}}\left(\frac{1}{t}\right)} \leq$$

$$\leq \left\| t_1^{-\theta_1\left(\frac{1}{p_1^0} - \frac{1}{p_1^1}\right)} t_2^{-\theta_2\left(\frac{1}{p_2^0} - \frac{1}{p_2^1}\right)} \sup_{t_i \geq s_i > 0} s_1^{\frac{1}{p_1^0}} s_2^{\frac{1}{p_2^0}} \overline{f}(s_1, s_2; M) \right\|_{L_{\overline{q}}\left(\frac{1}{t}\right)} =$$

$$= c \left\| t_1^{-\theta_1} t_2^{-\theta_2} \sup_{t_i \geq s_i > 0} s_1^{\frac{1}{p_1^0}} s_2^{\frac{1}{p_2^0}} \overline{f}(s_1, s_2; M) \right\|_{L_{\overline{q}}\left(\frac{1}{t}\right)}.$$

Используя (21), получим

$$\|f\|_{N_{\overline{p},\overline{q}}(M)} \leq \mathrm{C}_1 \Big\| t_1^{-\theta_1} t_2^{-\theta_2} \times$$
$$\times K\left(t_1, t_2, f; N_{(p_1^0, p_2^0),(\infty,\infty)}; N_{(p_1^0, p_2^1),(\infty,\infty)}; N_{(p_1^1, p_2^0),(\infty,\infty)}; N_{(p_1^1, p_2^1),(\infty,\infty)}\right) \Big\|_{L_{\overline{q}}\left(\frac{1}{t}\right)}$$
$$= \mathrm{C}_1 \|f\|_{\left(N_{\overline{p}_\varepsilon, \overline{\infty}}(M), \varepsilon \in E\right)_{\overline{\theta},\overline{q}}}.$$

Таким образом вложение (20) доказано, а следовательно

$$\left(N_{\bar{p}_\varepsilon, \bar{q}_\varepsilon}(M), \varepsilon \in E\right)_{\bar{\theta},\bar{q}} \hookrightarrow N_{\bar{p},\bar{q}}(M).$$

Интерполяционная теорема доказана.

2 ТЕОРЕМА ТИПА ХАРДИ-ЛИТТЛВУДА ДЛЯ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ ХААРА

2.1 Система Хаара и ее свойства

Система Хаара - это система функций $\chi = \left\{\chi_k^j(x)\right\}_{k=0,j=1}^{\infty,2^k}$, $x \in [0,1]$, в которой $\chi_1(x) \equiv 1$, а функция $\chi_k^j(x)$, где $k = 0,1,\ldots$, $j = 1,2,\ldots,2^k$ определяется следующим образом:

$$\chi_k^j(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}}, & \frac{2j-2}{2^{k+1}} < x < \frac{2j-1}{2^{k+1}} \\ -2^{\frac{k}{2}}, & \frac{2j-1}{2^{k+1}} < x < \frac{2j}{2^{k+1}} \\ 0, & x \notin \left(\frac{j-1}{2^k}; \frac{j}{2^k}\right) \end{cases}$$

Иногда мы будем использовать одноиндексную систему Хаара $\chi_m(x)$, где $m = 2^k + j$, а множество индексов (k, j), определяющих систему Хаара будем обозначать через Ω. Взаимно однозначное соответствие между Ω и множеством натуральных чисел устанавливается формулой $m = 2^k + j$.

Рядом Фурье-Хаара функции $f \in L_1[0,1]$ является ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^k} a_k^j(f) \chi_k^j(x),$$

где $a_k^j(f) = \left(f, \chi_k^j\right)$ - коэффициенты Фурье-Хаара функции f.

Лемма 2.1. *Пусть* $0 < \bar{q} < \infty$, $f \in L_{\bar{q}}[0,1]^2$. $\left\{a_{k_1 k_2}^{j_1 j_2}(f)\right\}_{(k_i, j_i) \in \Omega}$- *ее коэффициенты Фурье по системе Хаара. Тогда* $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^2$ *справедливо равенство*

$$\left\| \sum_{j_2=1}^{2^{k_2}} \sum_{j_1=1}^{2^{k_1}} a_{k_1 k_2}^{j_1 j_2}(f) \chi_{k_1}^{j_1}(x_1) \chi_{k_2}^{j_2}(x_2) \right\|_{L_{\bar{q}}}$$

$$= 2^{k_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_2}\right)} \left(\sum_{j_2=1}^{2^{k_2}} \left(\sum_{j_1=1}^{2^{k_1}} \left| a_{k_1 k_2}^{j_1 j_2}(f) \right|^{q_1} \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

Доказательство. Из определения системы Хаара следует, что $\operatorname{supp}\chi_{k_i}^{j_i}(x_i) = \Delta_{k_i}^{j_i}$, тогда

$$\left\|\sum_{j_2=1}^{2^{k_2}}\sum_{j_1=1}^{2^{k_1}} a_{k_1k_2}^{j_1j_2}(f)\chi_{k_1}^{j_1}(x_1)\chi_{k_2}^{j_2}(x_2)\right\|_{L_{\bar{q}}} =$$

$$= \left(\sum_{j_2=1}^{2^{k_2}}\int_{\Delta_{k_2}^{j_2}}\left(\sum_{j_1=1}^{2^{k_1}}\left|a_{k_1k_2}^{j_1j_2}(f)\chi_{k_1}^{j_1}(x_1)\chi_{k_2}^{j_2}(x_2)\right|^{q_1} dx_1\right)^{\frac{q_2}{q_1}} dx_2\right)^{\frac{1}{q_2}}. \qquad (22)$$

Заметим, что $\left|\Delta_{k_i}^{j_i}\right| = 2^{-k_i}$ и для всех $x_i \in \Delta_{k_i}^{j_i}$ верно $\left|\chi_{k_i}^{j_i}(x_i)\right| = 2^{\frac{k_i}{2}}$. Тогда выражение (22) примет вид

$$2^{k_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_2}\right)}\left(\sum_{j_2=1}^{2^{k_2}}\left(\sum_{j_1=1}^{2^{k_1}}\left|a_{k_1k_2}^{j_1j_2}(f)\right|^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

2.2 Теорема Харди-Литтлвуда для двойных рядов Фурье-Хаара функций из сетевых пространств

Для $\bar{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2$, $1 \le \bar{q} \le \infty$, определим пространство $l_{\bar{q}}^{\bar{\sigma}}(l_\infty)$, как множество всех последовательностей $a = \left\{a_{k_1k_2}^{j_1j_2}\colon\ k_i \in \mathbb{Z},\ k_i \ge 0,\ 1 \le j_i \le 2^{k_i},\ i = 1,2\right\}$, для которых конечна норма:

$$\|a\|_{l_{\bar{q}}^{\bar{\sigma}}(l_\infty)} = \left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=1}^{\infty}\left(2^{\sigma_1k_1+\sigma_2k_2}\sup_{\substack{1\le j_i\le 2^{k_i}\\ i=1,2}}\left|a_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right|\right)^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}},$$

здесь и далее выражение $\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k{}^q\right)^{\frac{1}{q}}$ в случае, когда $q = \infty$ понимается как $\sup_{k\ge 0} b_k$.

Нам понадобится теорема 1 из работы К.А. Бекмаганбетова [55], которую сформулируем для нашего случая, когда $A = l_\infty$.

Теорема 2.1. *Пусть* $\bar{\sigma}_0 = (\sigma_1^0, \sigma_2^0) > \bar{\sigma}_1 = (\sigma_1^1, \sigma_2^1)$, $0 \le \bar{q}, \bar{q}_0, \bar{q}_1 \le \infty$, $0 < \bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2) < 1$ *справедливо равенство*

$$\left(l_{\bar{q}_\varepsilon}^{\bar{\sigma}_\varepsilon}(l_\infty), \varepsilon \in E\right)_{\bar{\theta},\bar{q}} = l_{\bar{q}}^{\bar{\sigma}}(l_\infty),$$

где $\bar{\sigma} = (1-\bar{\theta})\bar{\sigma}_0 + \bar{\theta}\bar{\sigma}_1$.

Теорема 2.2. *Пусть* $0 < \bar{p} < \infty$, $0 < \bar{q} \leq \infty$, $\bar{\sigma} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\bar{p}}$, M *- множество всех прямоугольников в* $[0,1]^2$. *Тогда, для того, чтобы* $f \in N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ *необходимо и достаточно, чтобы последовательность ее коэффициентов Фурье-Хаара* $a(f) = \left\{a_{k_1k_2}^{j_1j_2}:\ k_i \in \mathbb{Z},\ k_i \geq 0,\ \ 1 \leq j_i \leq 2^{k_i},\ i = 1{,}2\right\}$ *принадлежала пространству* $l_{\bar{q}}^{\bar{\sigma}}(l_\infty)$, *при этом имеет место соотношение:*

$$\|f\|_{N_{\bar{p},\bar{q}}(M)} \asymp \|a\|_{l_{\bar{q}}^{\bar{\sigma}}(l_\infty)}. \tag{23}$$

Отметим, что для пространств $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ соотношение (23) выполняется без всяких дополнительных условий на функцию f и на её коэффициенты Фурье. Таким образом, для сетевых пространств $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ аналог равенства Парсеваля выполняется для всех $1 < \bar{p} < \infty$.

Доказательство. Пусть функция $f \in N_{\bar{p},\bar{\infty}}(M)$, $a(f) = \left\{a_{k_1k_2}^{j_1j_2}:\ k_i \in \mathbb{Z},\ k_i \geq 0,\ \ 1 \leq j_i \leq 2^{k_i},\ i = 1{,}2\right\}$ её коэффициенты Фурье по системе Хаара. Докажем неравенство:

$$\|a(f)\|_{l_{\bar{\infty}}^{\bar{\sigma}}(l_\infty)} \leq C\|f\|_{N_{\bar{p},\bar{\infty}}(M)}, \tag{24}$$

где $\bar{\sigma} = \bar{\sigma} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\bar{p}}$, $1 < \bar{p} < \infty$.

По определению пространства $l_{\bar{p}}^{\bar{\sigma}}(l_\infty)$

$$\|a(f)\|_{l_{\bar{\infty}}^{\bar{\sigma}}(l_\infty)} = \sup_{k_i \geq 0} 2^{k_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}\right)} \max_{\substack{1\leq j_i\leq 2^{k_i}\\ i=1,2}} \left|a_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right|.$$

Заметим, из определения коэффициентов Фурье-Хаара, имеем:

$$a_{k_1k_2}^{j_1j_2}(f) = 2^{\frac{k_1}{2}+\frac{k_2}{2}}\left(\int\limits_{\left(\Delta_{k_1}^{j_1}\right)^+}\int\limits_{\left(\Delta_{k_2}^{j_2}\right)^+} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 - \right.$$

$$
-\int\limits_{\left(\Delta_{k_1}^{j_1}\right)^-}\int\limits_{\left(\Delta_{k_2}^{j_2}\right)^+} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 - \int\limits_{\left(\Delta_{k_1}^{j_1}\right)^+}\int\limits_{\left(\Delta_{k_2}^{j_2}\right)^-} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 +
$$

$$
\left. + \int\limits_{\left(\Delta_{k_1}^{j_1}\right)^-}\int\limits_{\left(\Delta_{k_2}^{j_2}\right)^-} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 \right),
$$

где $\left(\Delta_{k_i}^{j_i}\right)^+ = \left(\frac{2j_i-2}{2^{k_i+1}};\frac{2j_i-1}{2^{k_i+1}}\right)$, $\left(\Delta_{k_i}^{j_i}\right)^- = \left(\frac{2j_i-1}{2^{k_i+1}};\frac{2j_i}{2^{k_i+1}}\right)$, $i = 1,2$.

Тогда, учитывая, что длины отрезков $|(\Delta)^+| = |(\Delta)^-| = \frac{1}{2^{k_i+1}}$, получим

$$
\|a(f)\|_{l_\infty^{\bar\sigma}(l_\infty)} =
$$

$$
= \sup_{k_i\geq 0} 2^{k_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}\right)} \max_{\substack{1\leq j_i\leq 2^{k_i}\\ i=1,2}} \left| 2^{\frac{k_1}{2}+\frac{k_2}{2}} \left(\int\limits_{\left(\Delta_{k_1}^{j_1}\right)^+}\int\limits_{\left(\Delta_{k_2}^{j_2}\right)^+} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 - \right.\right.
$$

$$
-\int\limits_{\left(\Delta_{k_1}^{j_1}\right)^-}\int\limits_{\left(\Delta_{k_2}^{j_2}\right)^+} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 - \int\limits_{\left(\Delta_{k_1}^{j_1}\right)^+}\int\limits_{\left(\Delta_{k_2}^{j_2}\right)^-} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 +
$$

$$
\left.\left. + \int\limits_{\left(\Delta_{k_1}^{j_1}\right)^-}\int\limits_{\left(\Delta_{k_2}^{j_2}\right)^-} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 \right)\right| \leq
$$

$$
\leq 4\cdot 2^{-\frac{1}{p_1'}-\frac{1}{p_2'}} \sup_{Q_1\times Q_2\in M} \frac{1}{|Q_1|^{\frac{1}{p_1'}}}\frac{1}{|Q_2|^{\frac{1}{p_2'}}} \left|\int\limits_{Q_1}\int\limits_{Q_2} f(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| =
$$

$$
= 2^{\left(1-\frac{1}{p_1'}\right)+\left(1-\frac{1}{p_2'}\right)} \sup_{Q_1\times Q_2\in M} \frac{1}{|Q_1|^{\frac{1}{p_1'}}}\frac{1}{|Q_2|^{\frac{1}{p_2'}}} \left|\int\limits_{Q_1}\int\limits_{Q_2} f(x_1,x_2)dx_1dx_2\right| =
$$

$$
= 2^{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}}\|f\|_{N_{\bar p,\bar\infty}(M)}.
$$

Определим оператор $Tf = \left\{a_{k_1,k_2}^{j_1,j_2}(f)\right\}$. Пусть $\bar p$ удовлетворяет условию теоремы и $\bar p_0$, $\bar p_1$, $\bar\sigma_0$, $\bar\sigma_1$ такие, что $1 < \bar p_0 < \bar p < \bar p_1 < \infty$, где $\bar p_0 = (p_1^0, p_2^0)$, $\bar p_1 = (p_1^1, p_2^1)$ и $\sigma_1^0 = \frac{1}{2}-\frac{1}{p_1^0}$, $\sigma_2^0 = \frac{1}{2}-\frac{1}{p_2^0}$, $\sigma_1^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{p_1^1}$, $\sigma_2^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{p_2^1}$.

Тогда из последнего неравенства следует, что для данного оператора имеют место

$$T: N_{(p_1^{\varepsilon_1}, p_2^{\varepsilon_2}), \bar{\infty}}(M) \to l_{\bar{\infty}}^{(\sigma_1^{\varepsilon_1}, \sigma_2^{\varepsilon_2})}(l_\infty).$$

Следовательно:

$$T: \left(N_{\bar{p}_\varepsilon, \bar{\infty}}(M), \varepsilon \in E\right)_{\bar{\theta}, \bar{q}} \to \left(l_{\bar{\infty}}^{\bar{\sigma}_\varepsilon}(l_\infty), \varepsilon \in E\right)_{\bar{\theta}, \bar{q}}.$$

Согласно интерполяционным теоремам 1.8 и 1.3, имеем:

$$\left(N_{\bar{p}_\varepsilon, \bar{\infty}}(M), \varepsilon \in E\right)_{\bar{\theta}, \bar{q}} = N_{\bar{p}, \bar{q}}(M), \quad \left(l_{\bar{\infty}}^{\bar{\sigma}_\varepsilon}(l_\infty), \varepsilon \in E\right)_{\bar{\theta}, \bar{q}} = l_{\bar{q}}^{\bar{\sigma}}(l_\infty).$$

Следовательно $T: N_{\bar{p}, \bar{q}}(M) \to l_{\bar{q}}^{\bar{\sigma}}(l_\infty)$.

Тем самым получим

$$\|a\|_{l_{\bar{q}}^{\bar{\sigma}}(l_\infty)} \leq C\|f\|_{N_{\bar{p}, \bar{q}}(M)},$$

где $\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1-\bar{\theta}}{\bar{p}_0} + \frac{\bar{\theta}}{\bar{p}_1}$, $\bar{\sigma} = (1-\bar{\theta})\bar{\sigma}_0 + \bar{\theta}\bar{\sigma}_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\bar{p}}$.

Покажем обратное неравенство. Пусть $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $a(f) \in l_{\bar{q}}^{\bar{\sigma}}(l_\infty)$. Рассмотрим полином

$$S_{N_1,N_2}(a;\ x_1, x_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1} \sum_{k_2=0}^{N_2} \sum_{j_1=1}^{2^{k_1}} \sum_{j_2=0}^{2^{k_2}} a_{k_1 k_2}^{j_1 j_2} \chi_{k_1}^{j_1}(x_1) \chi_{k_2}^{j_2}(x_2).$$

$Q = Q_1 \times Q_2$ – произвольный прямоугольник из сети M. Тогда

$$\frac{1}{|Q_1|^{\frac{1}{p_1'}} |Q_2|^{\frac{1}{p_2'}}} \left| \int_{Q_2} \int_{Q_1} S_{N_1,N_2}(a;\ x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k_1=0}^{N_1} \sum_{k_2=0}^{N_2} \frac{1}{|Q_1|^{\frac{1}{p_1'}} |Q_2|^{\frac{1}{p_2'}}} \left| \int_{Q_2} \int_{Q_1} \sum_{j_1=1}^{2^{k_1}} \sum_{j_2=0}^{2^{k_2}} a_{k_1 k_2}^{j_1 j_2} \chi_{k_1}^{j_1}(x_1) \chi_{k_2}^{j_2}(x_2)\, dx_1 dx_2 \right| =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{N_1} \sum_{k_2=0}^{N_2} \frac{1}{|Q_1|^{\frac{1}{p_1'}} |Q_2|^{\frac{1}{p_2'}}} \left| \sum_{j_1=1}^{2^{k_1}} \sum_{j_2=0}^{2^{k_2}} a_{k_1 k_2}^{j_1 j_2} \int_{Q_2} \chi_{k_2}^{j_2}(x_2)\, dx_2 \int_{Q_1} \chi_{k_1}^{j_1}(x_1) dx_1 \right|.$$

Из определений функций $\chi_{k_1}^{j_1}(x_1)$ и $\chi_{k_2}^{j_2}(x_2)$ следует, что не более четырех слагаемых в сумме:

$$\sum_{j_1=1}^{2^{k_1}} \sum_{j_2=0}^{2^{k_2}} a_{k_1 k_2}^{j_1 j_2} \int_{Q_2} \chi_{k_2}^{j_2}(x_2)\, dx_2 \int_{Q_1} \chi_{k_1}^{j_1}(x_1) dx_1$$

отличны от нуля, а именно, те слагаемые, где носители функций $\chi_{k_1}^{j_1}(x_1)$, $\chi_{k_2}^{j_2}(x_2)$ содержат соответственно концы отрезков Q_1, Q_2. Следовательно:

$$\frac{1}{|Q_1|^{\frac{1}{p_1'}} |Q_2|^{\frac{1}{p_2'}}} \left| \int_{Q_2} \int_{Q_1} S_{N_1,N_2}(a;\ x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right| \le$$

$$\le 4 \sum_{k_1=0}^{N_1} \sum_{k_2=0}^{N_2} \frac{1}{|Q_1|^{\frac{1}{p_1'}} |Q_2|^{\frac{1}{p_2'}}} \max_{\substack{1 \le j_i \le 2^{k_i} \\ i=1,2}} \left| a_{k_1 k_2}^{j_1 j_2} \right| 2^{\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2}} \min\left(|Q_1|, \frac{1}{2^{k_1}} \right) \min\left(|Q_2|, \frac{1}{2^{k_2}} \right).$$

Заметим, что

$$2^{\frac{k_i}{2}} \frac{1}{|Q_i|^{\frac{1}{p_i'}}} \min\left(|Q_i|, \frac{1}{2^{k_i}} \right) \le 2^{k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_i} \right)},$$

Следовательно:

$$\frac{1}{|Q_1|^{\frac{1}{p_1'}} |Q_2|^{\frac{1}{p_2'}}} \left| \int_{Q_2} \int_{Q_1} S_{N_1,N_2}(a;\ x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right|$$

$$\le 4 \sum_{k_1=0}^{N_1} \sum_{k_2=0}^{N_2} 2^{k_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1} \right) + k_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_2} \right)} \max_{\substack{1 \le j_i \le 2^{k_i} \\ i=1,2}} \left| a_{k_1 k_2}^{j_1 j_2} \right|.$$

В силу произвольности выбора отрезков Q_1 и Q_2 получим

$$\left\| S_{N_1,N_2}(a;\ x_1, x_2) \right\|_{N_{\overline{p},\overline{\infty}}(M)} =$$

$$= \sup_{\substack{t_i>0\\ i=1,2}} t_1^{\frac{1}{p_1}} t_2^{\frac{1}{p_2}} \sup_{\substack{|Q_i|\geq t_i\\ i=1,2}} \frac{1}{|Q_1||Q_2|} \int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} S_{N_1,N_2}(a;\ x_1,x_2)dx_1dx_2 \leq$$

$$\sup_{Q_1\times Q_2\in M} \frac{1}{|Q_1|^{\frac{1}{p_1'}}|Q_2|^{\frac{1}{p_2'}}} \left| \int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} S_{N_1,N_2}(a;\ x_1,x_2)dx_1dx_2 \right| \leq 4\|a\|_{l_{\bar{1}}^{\bar{\sigma}}(l_\infty)}.$$

Пусть $\bar{p}_0$, $\bar{p}_1$, $\bar{\sigma}_0$, $\bar{\sigma}_1$ такие, что $1 < \bar{p}_0 < \bar{p} < \bar{p}_1 < \infty$, $\bar{\sigma}_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\bar{p}_0}$, $\bar{\sigma}_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\bar{p}_1}$. Рассмотрим оператор $Ta = S_{N_1,N_2}(a;\ x_1,x_2)$. Из последнего неравенства следует, что для данного оператора имеют место:

$$T: l_{\bar{1}}^{(\sigma_1^{\varepsilon_1},\sigma_2^{\varepsilon_2})}(l_\infty) \to N_{(p_1^{\varepsilon_1},p_2^{\varepsilon_2}),\bar{\infty}}(M).$$

Тогда

$$T: \left(l_{\bar{1}}^{\bar{\sigma}_\varepsilon}(l_\infty), \varepsilon \in E\right)_{\bar{\theta},\bar{q}} \to \left(N_{\bar{p}_\varepsilon,\bar{\infty}}(M), \varepsilon \in E\right)_{\bar{\theta},\bar{q}}.$$

Откуда имеем

$$T: l_{\bar{q}}^{\bar{\sigma}}(l_\infty) \to N_{\bar{p},\bar{q}}(M),$$

где $\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1-\bar{\theta}}{\bar{p}_0} + \frac{\bar{\theta}}{\bar{p}_1}$, $\bar{\sigma} = (1-\bar{\theta})\bar{\sigma}_0 + \bar{\theta}\bar{\sigma}_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\bar{p}}$ и следовательно имеет место неравенство:

$$\left\|S_{N_1,N_2}(a;\ x_1,x_2)\right\|_{N_{\bar{p},\bar{q}}(M)} \leq C\|a\|_{l_{\bar{q}}^{\bar{\sigma}}(l_\infty)}.$$

Далее воспользуемся тем, что пространство $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ является банаховым пространством (см. [56]) и следовательно $S_{N_1,N_2}(a;\ x_1,x_2)$ сходится к некоторой функции $f \in N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ при $N_1, N_2 \to +\infty$.

Теорема 2.2 доказана.

2.3 Теорема типа Харди-Литтлвуда для двойных рядов Фурье-Хаара функций из пространств Лебега со смешанной метрикой

Напомним определение пространства Лебега со смешанной метрикой.

Пусть $0 < \bar{p} \leq \infty$. Пространство $L_{\bar{p}}[0,1]^2$, называемое пространством Лебега со смешанной метрикой, определяется как множество измеримых на $[0,1]^2$ функций f, для которых конечна величина:

$$\|f\|_{L_{\bar{p}}[0,1]^2} := \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |f(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

Функция $f(x_1, x_2)$ называется монотонно-невозрастающей по каждой переменной, если для $0 \le y_1 \le x_1$ и $0 \le y_2 \le x_2$ выполняется неравенство

$$f(x_1, x_2) \le f(y_1, y_2).$$

Теорема 2.3. *Пусть* $1 < \bar{p} < \infty$, $\bar{\sigma} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\bar{p}}$, $f(x_1, x_2)$ - *монотонно-невозрастающая по каждой переменной функция. Тогда, для того, чтобы* $f \in L_{\bar{p}}[0,1]^2$ *необходимо и достаточно, чтобы последовательность ее коэффициентов Фурье-Хаара* $a = \left\{ a_{k_1 k_2}^{j_1 j_2} : \ k_i \in \mathbb{Z}, \ k_i \ge 0, \ 1 \le j_i \le 2^{k_i}, \ i = 1,2 \right\}$ *принадлежала пространству* $l_{\bar{p}}^{\bar{\sigma}}(l_\infty)$, *причем имеет место соотношение*

$$\|f\|_{L_{\bar{p}}[0,1]^2} \asymp \|a\|_{l_{\bar{p}}^{\bar{\sigma}}(l_\infty)}.$$

Приведем сначала лемму.

Лемма 2.2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\varphi \in L_p[0,1]$, *тогда*

$$\|\varphi\|_{L_p[0,1]} \asymp \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{-\frac{k}{p}} \varphi^{**}(2^k) \right)^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

где

$$\varphi^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi^*(s) ds = \sup_{|e|=t} \frac{1}{|e|} \int_e |\varphi(x)| dx.$$

Доказательство:

$$\|\varphi\|_{L_p[0,1]} \asymp \left(\int_0^1 (\varphi^{**}(t))^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-(k+1)}}^{2^{-k}} (\varphi^{**}(t))^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\asymp \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \, (\varphi^{**}(2^k))^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.3

Заметим, что из монотонности $f(x_1, x_2)$ имеем

$$\left|a_{k_1 k_2}^{j_1 j_2}\right| = \left|\int_{\Delta_{k_2}^{j_2}} \int_{\Delta_{k_1}^{j_1}} f(x_1, x_2) \chi_{k_1}^{j_1}(x_1) \chi_{k_2}^{j_2}(x_2) dx_1 dx_2\right| \leq$$

$$\leq 2^{\frac{k_1}{2}+\frac{k_2}{2}} \int_{\Delta_{k_2}^{j_2}} \int_{\Delta_{k_1}^{j_1}} |f(x_1, x_2)| dx_1 dx_2 = 2^{\frac{k_1}{2}+\frac{k_2}{2}} \int_0^{2^{-k_2}} \int_0^{2^{-k_1}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Тогда из этой оценки, неравенств Минковского и леммы 2.2

$\|a(f)\|_{l_{\bar{p}}^{\bar{\sigma}}(l_\infty)} \leq$

$$\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{\left(1-\frac{1}{p_1}\right)k_1+\left(1-\frac{1}{p_2}\right)k_2} \int_0^{2^{-k_2}} \int_0^{2^{-k_1}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2\right)^{p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_2}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(2^{\left(1-\frac{1}{p_2}\right)k_2} \int_0^{2^{-k_2}} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{\left(1-\frac{1}{p_1}\right)k_1} \int_0^{2^{-k_1}} f(x_1, x_2) dx_1\right)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} dx_2\right)^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

$$= \left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(2^{1-\frac{k_2}{p_2}} \int_0^{2^{-k_2}} \varphi(x_2) dx_2\right)^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(2^{-\frac{k_2}{p_2}} \varphi^{**}(2^{-k_2})\right)^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \asymp$$

$$\asymp \left(\int_0^1 (\varphi^*(t))^{p_2} dt \right)^{\frac{1}{p_2}} = \|\varphi\|_{L_{p_2}},$$

здесь

$$\varphi(x_2) = \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \left(2^{1-\frac{k_1}{p_1}} \int_0^{2^{-k_1}} |f(x_1, x_2)| dx_1 \right)^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

Аналогично

$$\varphi(x_2) \leq \left(\int_0^1 |f(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

Таким образом, получим

$$\|a\|_{l_{\overline{p}}^{\overline{\sigma}}(l_\infty)} \leq C\|f\|_{L_{\overline{p}}[0,1]^2}.$$

Покажем обратное неравенство. Так как $f(x_1, x_2)$ монотонно-невозрастающая по каждой переменной функция, то

$$0 \leq f(x_1, x_2) \leq \frac{1}{x_1 x_2} \int_0^{x_2} \int_0^{x_1} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \leq \bar{f}(x_1, x_2; M).$$

Следовательно из теоремы 2.2 следует

$$\|f\|_{L_{\overline{p}}[0,1]^2} \leq \|f\|_{N_{\overline{p},\overline{p}}(M)} \leq c\|a(f)\|_{l_{\overline{p}}^{\overline{\sigma}}(l_\infty)}.$$

Теорема 2.3 доказана.

3 МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ ХААРА

3.1 Неравенство разных метрик

Хорошо известно неравенство разных метрик С.М. Никольского для рядов Фурье-Хаара в пространствах Лебега [57]. При $1 \le p < \infty$ и $1 < q < \infty$ его в терминах частичных сумм можно записать следующим образом:

$$\|S_{2^n}(f)\|_{L_q} = 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|f\|_{L_p}. \tag{25}$$

Откуда следует, что если $f \in L_p[0,1]$, то

$$\|S_{2^n}(f)\|_{L_q} = O\left(2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\right).$$

Здесь

$$S_{2^n}(f) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{2^k} a_k^j(f)\chi_k^j(x)$$

- частичная сумма ряда Фурье-Хаара функции f.

Нурсултановым Е.Д. в работе [58] для последовательности тригонометрических частичных сумм Фурье функции $f \in L_p[0,1]$ были получены следующие соотношения:

$$\|S_n(f)\|_{L_q} = o\left(n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right), \quad n \to \infty$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|S_n(f)\|_{L_q}\right)^p}{n} \le c\|f\|_{L_p}^p \tag{26}$$

Соотношение вида (26) использовалось при исследовании мультипликаторов по тригонометрической системе [53, p. 310, p. 313; 54, p. 615]. В данном разделе получим аналог соотношения (26) для рядов Фурье-Хаара. Он будет использован при доказательстве основной теоремы в параграфе 3.2.

Следующее утверждение в случае, когда $\tau = q$ доказано в работе Б.И. Голубова [59].

Лемма 3.1 *Пусть* $1 < r < q \le \infty$, $0 < \tau \le \infty$, $f \in L_r[0,1]$, $f \sim \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^k} a_k^j(f)\chi_k^j(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\Delta_k(f,x)$. *Тогда верно неравенство*

$$\|f\|_{L_{q,\tau}} \le c\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)k}\|\Delta_k(f,\cdot)\|_{L_r}\right)^{\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}}. \qquad (27)$$

Доказательство. Заметим, что

$$\|f\|_{L_q} \le \sum_{k=0}^{\infty}\|\Delta_k(f,x)\|_{L_q}.$$

Согласно неравенству (25)

$$\|f\|_{L_q} \le \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{q}\right)k}\|\Delta_k(f,x)\|_{L_r}. \qquad (28)$$

Определим оператор $T\colon \{\Delta_k(f,x)\}_{k=0}^{\infty} \to f(x)$.

Пусть $1 < q_0 < q < q_1$, $\alpha_0 = \frac{1}{r} - \frac{1}{q_0}$, $\alpha_1 = \frac{1}{r} - \frac{1}{q_1}$, тогда из неравенства (28) следует, что

$$T\colon l_1^{\alpha_0}(L_r) \to L_{q_0},$$
$$T\colon l_1^{\alpha_1}(L_r) \to L_{q_1}.$$

Следовательно

$$T\colon \left(l_1^{\alpha_0}(L_r), l_1^{\alpha_1}(L_r)\right)_{\theta,\tau} \to \left(L_{q_0}, L_{q_1}\right)_{\theta,\tau}.$$

Согласно интерполяционным свойствам пространств $l_\tau^{\alpha}(L_r)$ и L_q (см. теоремы 5.6.2, 5.3.1 из [60]):

$$\left(l_1^{\alpha_0}(L_r), l_1^{\alpha_1}(L_r)\right)_{\theta,\tau} = l_\tau^{\alpha}(L_r), \qquad \left(L_{q_0}, L_{q_1}\right)_{\theta,\tau} = L_{q,\tau}$$

имеем

$$T\colon l_\tau^{\alpha}(L_r) \to L_{q,\tau},$$

где $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$, $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1 = \frac{1}{r} - \frac{1}{q}$. Тем самым, неравенство (27) доказано.

Теорема 3.1. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $0 < \tau \le \infty$. *Если* $f \in L_{p,\tau}[0,1]$, *то*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)k}\left\|S_{2^k}(f)\right\|_{L_q}\right)^{\tau}\right)^{\frac{1}{\tau}} \leq c\|f\|_{L_{p,\tau}}, \tag{29}$$

где константа с зависит только от параметров p, q, τ.

Доказательство. Из неравенства (25) получим следующее неравенство

$$\sup_k 2^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)k}\left\|S_{2^k}(f)\right\|_{L_q} \leq c\|f\|_{L_p}.$$

Так же как и в доказательстве леммы 3.1 воспользуемся вещественным интерполяционным методом. Пусть $p_0, p_1, \alpha_0, \alpha_1$ такие, что $1 < p_0 < p < p_1 < q$, $\alpha_0 = \frac{1}{q} - \frac{1}{p_0}$, $\alpha_1 = \frac{1}{q} - \frac{1}{p_1}$. Определим оператор $Tf = \left\{S_{2^k}(f)\right\}_{k=0}^{\infty}$. Из последнего неравенства следует, что для данного оператора имеет место:

$$T: L_{p_0} \to l_{\infty}^{\alpha_0}\left(L_q\right),$$
$$T: L_{p_1} \to l_{\infty}^{\alpha_1}\left(L_q\right).$$

Тогда

$$T: \left(L_{p_0}, L_{p_1}\right)_{\theta,\tau} \to \left(l_{\infty}^{\alpha_0}\left(L_q\right), l_{\infty}^{\alpha_1}\left(L_q\right)\right)_{\theta,\tau}.$$

Откуда имеем

$$T: L_{p,\tau} \to l_{\tau}^{\alpha}\left(L_q\right),$$

где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1 = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ и следовательно имеет место неравенство (29).

3.2 Теорема о мультипликаторах рядов Фурье-Хаара функций из пространств Лоренца

Пусть $\chi = \left\{\chi_k^j(x)\right\}_{k=0,j=1}^{\infty,2^k}$ - система Хаара. Пусть функции $f \in L_{p,r}[0,1]$ соответствует ее ряд Фурье-Хаара:

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^k} a_k^j(f)\chi_k^j(x),$$

где $a_k^j(f) = \left(f,\ \chi_k^j\right)$ – коэффициенты Фурье-Хаара функции f. Будем говорить, что последовательность комплексных чисел $\lambda = \left\{\lambda_k^j\right\}_{k=0,j=1}^{\infty,2^k}$ является мультипликатором рядов Фурье по системе Хаара из пространства $L_{p,r}\,[0,1]$ в пространство $L_{q,s}\,[0,1]$, если для функции $f \in L_{p,r}[0,1]$ с рядом Фурье-Хаара $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^k} a_k^j(f)\chi_k^j(x)$ найдется функция $f_\lambda \in L_{q,s}[0,1]$, ряд Фурье-Хаара которой совпадает с рядом:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^k} \lambda_k^j a_k^j(f)\chi_k^j(x).$$

Для доказательства основной теоремы данного раздела нам понадобятся следующие утверждения:

Лемма 3.2. [59, с. 261]. *Пусть* $0 < q < \infty$, *тогда верно равенство*

$$\left\|\sum_{j=1}^{2^k} a_k^j\chi_k^j(x)\right\|_{L_q} = 2^{k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}\left(\sum_{j=1}^{2^k}\left|a_k^j\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Лемма 3.3. *Пусть* $0 < h < q < \infty$ *и* $\frac{1}{r} = \frac{1}{h} - \frac{1}{q}$. *Тогда верно*

$$\|a\|_{L_q} = \sup_{\{b_k\}}\frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k b_k|^h\right)^{\frac{1}{h}}}{\left(\sum_{k=0}^{\infty}|b_k|^r\right)^{\frac{1}{r}}}.$$

Данное утверждение доказывается аналогично обратному неравенству Гёльдера [61].

Теорема 3.2. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $0 < r, s \leq \infty$, $\frac{1}{\xi} = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r}\right)_+ = max\left\{\frac{1}{s} -\right.$ *1r, 0, тогда*

$$\|\lambda\|_{m(L_{p,r}\to\, L_{q,s})} \asymp \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)k}\sup_{1\leq j\leq 2^k}\left|\lambda_k^j\right|\right)^{\xi}\right)^{\frac{1}{\xi}},$$

в случае, когда $\xi = +\infty$, *выражение справа заменяется на* $\sup_{\substack{0\leq k\leq\infty \\ 1\leq j\leq 2^k}} 2^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)k}\left|\lambda_k^j\right|$.

Доказательство. Пусть последовательность комплексных чисел $\lambda =$

$\{\lambda_k^j\}_{k=0,j=1}^{\infty,2^k}$ такая, что

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)k}\sup_{1\le j\le 2^k}\left|\lambda_k^j\right|\right)^{\xi}\right)^{\frac{1}{\xi}}\le M<\infty.$$

Пусть $f\in L_{p,r}[0,1]$, возьмем $t\in(p,q)$. Из леммы 3.1 и леммы 3.2 следует

$$\|f_\lambda\|_{L_{q,s}}\le c\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{q}\right)k}\|\Delta_k(f_\lambda)\|_{L_t}\right)^{s}\right)^{\frac{1}{s}}=$$

$$=c\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{q}\right)k}2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}\right)k}\left(\sum_{j=1}^{2^k}\left|a_k^j\lambda_k^j\right|^t\right)^{\frac{1}{t}}\right)^{s}\right)^{\frac{1}{s}}\le$$

$$\le c\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)k}\sup_{1\le j\le 2^k}\left|\lambda_k^j\right|\left(\sum_{j=1}^{2^k}\left|a_k^j\right|^t\right)^{\frac{1}{t}}\right)^{s}\right)^{\frac{1}{s}}\le$$

$$=c\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{q}\right)k}\sup_{1\le j\le 2^k}\left|\lambda_k^j\right|\|\Delta_k f\|_{L_t}\right)^{s}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Далее применяем неравенство Гёльдера и теорему 3.1

$$\|f_\lambda\|_{L_{q,s}}\le c\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)k}\sup_{1\le j\le 2^k}\left|\lambda_k^j\right|\right)^{\xi}\right)^{\frac{1}{\xi}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{p}\right)k}\|\Delta_k f\|_{L_t}\right)^{r}\right)^{\frac{1}{r}}\le cM\|f\|_{L_{p,r}},$$

где $\frac{1}{s}=\frac{1}{r}+\frac{1}{\xi}$. Таким образом, $\lambda\in m(L_{p,r}\to L_{q,s})$ и $\|\lambda\|_{m(L_{p,r}\to L_{q,s})}\le cM$.

Пусть теперь $\lambda=\{\lambda_k^j\}_{k=0,j=1}^{\infty,2^k}$ является мультипликатором из пространства $L_{p,r}[0,1]$ в $L_{q,s}[0,1]$, $f\in L_{p,r}[0,1]$, $f\sim\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^k}a_k^j(f)\chi_k^j(x)$. Заметим, что согласно теореме 3 [24, с. 343] имеем

$$\|f_\lambda\|_{N_{q,s}(M)}\asymp\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)k}\sup_{1\le j\le 2^k}\left|\lambda_k^j a_k^j\right|\right)^{s}\right)^{\frac{1}{s}},$$

где M - множество отрезков из $[0,1]$. Учитывая, что $L_{q,s}[0,1] \hookrightarrow N_{q,s}(M)$ (см. лемму 1.2), получим:

$$\|f_\lambda\|_{L_{q,s}} \gtrsim \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)k} \sup_{1\le j\le 2^k}\left|\lambda_k^j a_k^j\right|\right)^s\right)^{\frac{1}{s}}.$$

С другой стороны, из леммы 3.1 и леммы 3.2 для $0 < h < p$ имеем:

$$\|f\|_{L_{p,r}} \lesssim \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{p}\right)k}\|\Delta_k f\|_{L_h}\right)^r\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)k}\left(\sum_{j=1}^{2^k}\left|a_k^j\right|^h\right)^{\frac{1}{h}}\right)^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Таким образом, получим:

$$\|\lambda\|_{m(L_{p,r}\to L_{q,s})} = \sup_{f\neq 0}\frac{\|f_\lambda\|_{L_{q,s}}}{\|f\|_{L_{p,r}}} \gtrsim$$

$$\gtrsim \sup_{\left\{a_k^j\right\}_{k=0,j=1}^{\infty,2^k}} \frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)k} \sup_{1\le j\le 2^k}\left|\lambda_k^j a_k^j\right|\right)^s\right)^{\frac{1}{s}}}{\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)k}\left(\sum_{j=1}^{2^k}\left|a_k^j\right|^h\right)^{\frac{1}{h}}\right)^r\right)^{\frac{1}{r}}} \qquad (30)$$

Пусть $\{j_k\}_{k=0}^{\infty}$ - последовательность такая, что

$$\left|\lambda_k^{j_k}\right| = \max_{1\le j\le 2^k}\left|\lambda_k^j\right|$$

Пусть $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ - произвольная последовательность чисел. Рассмотрим последовательность $\left\{a_k^j\right\}_{k=0,j=0}^{\infty,2^k-1}$ следующего вида

$$a_k^j = \begin{cases} b_k, & j = j_k \\ 0, & j \neq j_k \end{cases}, \qquad k = 0,1,\ldots$$

Тогда из (30), учитывая произвольность выбора последовательности $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$, имеем

$$\|\lambda\|_{m(L_{p,r}\to\ L_{q,s})} \gtrsim \sup_{\{b_k\}_{k=0}^{\infty}} \frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)k}|b_k|2^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)k}\sup_{1\le j\le 2^k}\left|\lambda_k^j\right|\right)^s\right)^{\frac{1}{s}}}{\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)k}|b_k|\right)^r\right)^{\frac{1}{r}}} =$$

$$= \sup_{\{d_k\}_{k=0}^{\infty}} \frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(2^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)k}\sup_{1\le j\le 2^k}\left|\lambda_k^j\right|\right)|d_k|\right)^s\right)^{\frac{1}{s}}}{\left(\sum_{k=0}^{\infty}|d_k|^r\right)^{\frac{1}{r}}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)k}\sup_{1\le j\le 2^k}\left|\lambda_k^j\right|\right)^{\xi}\right)^{\frac{1}{\xi}}$$

В последнем равенстве применили лемму 3.3.
Тем самым, теорема 3.2 доказана.

4 МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ ХААРА

4.1 Анизотропные пространства Бесова-Хаара и их свойства

Пусть A - линейное нормированное пространство, для $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^2$, $0 < \bar{p} \leq \infty$ определим пространство $l_{\bar{p}}^{\bar{\alpha}}(A)$, как множество всех последовательностей $a = \{a_{k_1 k_2}\}_{k_i \in \mathbb{Z}_+}$ со значением в A, для которых конечна квазинорма:

$$\|a\|_{l_{\bar{p}}^{\bar{\alpha}}(\boldsymbol{A})} = \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \left(2^{\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2} \|a_{k_1 k_2}\|_{\boldsymbol{A}} \right)^{p_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

Теорема 4.1. *Пусть* $0 < \bar{p}_0 = (p_1^0, p_2^0) < \bar{p} = (p_1, p_2) < \bar{p}_1 = (p_1^1, p_2^1) \leq \infty$, $\bar{p}_\varepsilon = \left(p_1^{\varepsilon_1}, p_2^{\varepsilon_2}\right)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in E$, $0 < \bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2) < 1$. *Тогда*

$$\left(l_{\bar{p}_\varepsilon}^{\bar{\alpha}_\varepsilon}(\mathrm{A}), \varepsilon \in E \right)_{\bar{\theta}, \bar{\tau}} = l_{\bar{\tau}}^{\bar{\alpha}}(A),$$

где $\bar{\alpha} = (1 - \bar{\theta})\bar{\alpha}_0 + \bar{\theta}\bar{\alpha}_1$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы из [55, с. 31], которая доказана в случае, когда $A = L_{q,\tau}$.

Пусть $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^2$, $0 < \bar{\tau}, \bar{r} \leq \infty$. Для функции $f \in L_1[0,1]^2$ обозначим:

$$\Delta_{k_1 k_2}(f;\, x_1, x_2) = \sum_{j_2=1}^{2^{k_2}} \sum_{j_1=1}^{2^{k_1}} a_{k_1 k_2}^{j_1 j_2}(f) \chi_{k_1}^{j_1}(x_1) \chi_{k_2}^{j_2}(x_2),$$

где $\left\{a_{k_1 k_2}^{j_1 j_2}(f)\right\}_{(k_i, j_i) \in \Omega}$ - коэффициенты Фурье функции f по кратной системе Хаара.

Анизотропным пространством типа Бесова по системе Хаара $HB_{\bar{r},\bar{\tau}}^{\bar{\alpha}}([0,1]^2)$ назовём множество функций f из $L_1[0,1]^2$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{HB_{\bar{r},\bar{\tau}}^{\bar{\alpha}}([0,1]^2)} = \left\| 2^{\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2} \left\| \Delta_{k_1 k_2}(f) \right\|_{L_{\bar{r}}} \right\|_{l_{\bar{\tau}}}.$$

Заметим, что пространство $HB_{\bar{r},\bar{\tau}}^{\bar{\alpha}}([0,1]^2)$ является ретракцией пространства $l_{\bar{\tau}}^{\bar{\alpha}}(L_{\bar{r}})$, следовательно согласно теореме 4.1:

$$\left(HB_{\bar{r},\bar{\tau}_\varepsilon}^{\bar{\alpha}_\varepsilon}, \varepsilon \in E \right)_{\bar{\theta}, \bar{\tau}} = HB_{\bar{r},\bar{\tau}}^{\bar{\alpha}} \qquad (31)$$

где $\bar{\alpha} = (1-\bar{\theta})\bar{\alpha}_0 + \bar{\theta}\bar{\alpha}_1$.

Лемма 4.1. *Пусть* $1 < \bar{p} \le \bar{q} < \infty$, $f \in L_{\bar{p}}[0,1]^2$,

$$S_{m_1 m_2}(f;\ x_1, x_2) = \sum_{k_2=0}^{n_2} \sum_{k_1=0}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{2^{k_2}} \sum_{j_1=1}^{2^{k_1}} a_{k_1 k_2}^{j_1 j_2}(f) \chi_{k_1}^{j_1}(x_1) \chi_{k_2}^{j_2}(x_2)$$

- *частичная сумма ряда Фурье-Хаара функции* f. *Тогда*

$$m_1^{\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)} m_2^{\left(\frac{1}{q_2}-\frac{1}{p_2}\right)} \left\| S_{m_1 m_2}(f) \right\|_{L_{\bar{q}}} \le 4 \|f\|_{L_{\bar{q}}}.$$

Доказательство. Интегральное представление частичной суммы:

$$S_{m_1 m_2}(f;\ x_1, x_2) = \int_0^1 \int_0^1 f\ (t_1, t_2)\, D_{m_1 m_2}(\ x_1, x_2, t_1, t_2) dt_1 dt_2 =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 f\ (t_1, t_2)\, D_{m_1}(\ x_1, t_1) D_{m_2}(x_2, t_2) dt_1 dt_2.$$

Пусть $2^{k_i} \le m_i \le 2^{k_i+1}$ $(i = 1, 2)$, тогда учитывая, что

$$\forall\ x_i, t_i \in \left[\frac{r_i}{2^{k_i}}, \frac{r_i+1}{2^{k_i}}\right], \qquad i = 1, 2, \qquad D_{m_1 m_2}(\bar{x}, \bar{t}) \le 4 \cdot 2^{k_1+k_2}$$

и $D_{m_1 m_2}(\bar{x}, \bar{t}) = 0$ для всех остальных $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{t} = (t_1, t_2) \in [0, 1]^2$.

Тогда имеем:

$$\left\| S_{m_1 m_2} \right\|_{L_{\bar{q}}} = \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left| \int_0^1 \int_0^1 f\ (t_1, t_2)\, D_{m_1}(\ x_1, t_1) D_{m_2}(x_2, t_2) dt_1 dt_2 \right|^{q_1} dx_1 \right)^{\frac{q_2}{q_1}} dx_2 \right)^{\frac{1}{q_2}}$$

$$= \left(\sum_{r_2=0}^{2^{k_2-1}} \int_{\frac{r_2}{2^{k_2}}}^{\frac{r_2+1}{2^{k_2}}} \left(\sum_{r_1=0}^{2^{k_1-1}} \int_{\frac{r_1}{2^{k_1}}}^{\frac{r_1+1}{2^{k_1}}} \left| \int_{\frac{r_2}{2^{k_2}}}^{\frac{r_2+1}{2^{k_2}}} \int_{\frac{r_1}{2^{k_1}}}^{\frac{r_1+1}{2^{k_1}}} f\ (t_1, t_2)\, 2^{k_1+k_2} dt_1 dt_2 \right|^{q_1} dx_1 \right)^{\frac{q_2}{q_1}} dx_2 \right)^{\frac{1}{q_2}}$$

$$= 4\cdot 2^{k_1+k_2-\frac{k_1}{q_1}-\frac{k_2}{q_2}}\left(\sum_{r_2=0}^{2^{k_2-1}}\left(\sum_{r_1=0}^{2^{k_1-1}}\left|\int\limits_{\frac{r_2}{2^{k_2}}}^{\frac{r_2+1}{2^{k_2}}}\int\limits_{\frac{r_1}{2^{k_1}}}^{\frac{r_1+1}{2^{k_1}}} f\,(t_1,t_2)\,dt_1dt_2\right|^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

Далее, учитывая, что $p_1 \le q_1$ и $p_2 \le q_2$ применим неравенство Йенсена и обобщенное неравенство Минковского:

$\left\|S_{m_1m_2}\right\|_{L_{\bar{q}}} \le$

$$\le 4\cdot 2^{k_1+k_2-\frac{k_1}{q_1}-\frac{k_2}{q_2}}\left(\sum_{r_2=0}^{2^{k_2-1}}\left(\int\limits_{\frac{r_2}{2^{k_2}}}^{\frac{r_2+1}{2^{k_2}}}\left(\sum_{r_1=0}^{2^{k_1-1}}\left(\int\limits_{\frac{r_1}{2^{k_1}}}^{\frac{r_1+1}{2^{k_1}}} f\,(t_1,t_2)dt_1\right)^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} dt_2\right)^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера, получим:

$$\left\|S_{m_1m_2}\right\|_{L_{\bar{q}}} \le 4\cdot 2^{k_1+k_2-\frac{k_1}{q_1}-\frac{k_2}{q_2}-\frac{k_1}{p_1'}-\frac{k_2}{p_2'}}\left(\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1 |f\,(t_1,t_2)|^{p_1}\,dt_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

$$= 4\cdot 2^{k_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)}\|f\|_{L_{\bar{p}}} \le 4\cdot m_1^{\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)} m_2^{\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)}\|f\|_{L_{\bar{p}}}.$$

Лемма 4.1 доказана.

Лемма 4.2. *Пусть* $1 < \bar{r} < \bar{q} < \infty$, $0 < \bar{\tau} \le \infty$, $\bar{\alpha} = \frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{q}}$,

$$f\sim \sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=1}^{2^{k_2}}\sum_{j_1=1}^{2^{k_1}} a_{k_1k_2}^{j_1j_2}(f)\chi_{k_1}^{j_1}(x_1)\chi_{k_2}^{j_2}(x_2) = \sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}\Delta_{k_1k_2}(f;\ x_1,x_2).$$

Тогда имеет место вложение:

$$HB_{\bar{r},\bar{\tau}}^{\bar{\alpha}} \hookrightarrow L_{\bar{q},\bar{\tau}},$$

т.е. верно неравенство

$$\|f\|_{L_{\bar q,\bar\tau}} \le c\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=1}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{q_1}\right)k_1+\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{q_2}\right)k_2}\left\|\Delta_{k_1k_2}(f)\right\|_{L_{\bar r}}\right)^{\tau_1}\right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right)^{\frac{1}{\tau_2}}. \qquad (32)$$

Доказательство. Заметим, что

$$\|f\|_{L_{\bar q}} \le \sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}\left\|\Delta_{k_1k_2}(f;\ x_1,x_2)\right\|_{L_{\bar q}}.$$

Согласно лемме 4.1 имеем

$$\|f\|_{L_{\bar q}} \le \sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty} 2^{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{q_1}\right)k_1+\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{q_2}\right)k_2}\left\|\Delta_{k_1k_2}(f)\right\|_{L_{\bar r}} = \|f\|_{HB^{\bar\alpha}_{\bar r,\bar 1}}. \qquad (33)$$

Таким образом доказано вложение:

$$HB^{\bar\alpha}_{\bar r,\bar 1} \hookrightarrow L_{\bar q},$$

где $\bar\alpha = \frac{1}{\bar r}-\frac{1}{\bar q}$. Пусть $\bar q_0, \bar q_1, \bar\alpha_0, \bar\alpha_1$ вектора, удовлетворяющие условиям $0<\bar q_0<\bar q<\bar q_1<\infty$, $\bar\alpha_0=\frac{1}{\bar r}-\frac{1}{\bar q_0}$, $\bar\alpha_1=\frac{1}{\bar r}-\frac{1}{\bar q_1}$, тогда из неравенства (33) для оператора вложения T имеет место:

$$T: HB^{\left(\alpha_1^{\varepsilon_1},\alpha_2^{\varepsilon_2}\right)}_{\bar r,\bar 1} \to L_{\left(q_1^{\varepsilon_1},q_2^{\varepsilon_2}\right)}, \qquad \varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in E.$$

Следовательно по лемме 1.1 имеем

$$T: \left(HB^{\bar\alpha_\varepsilon}_{\bar r,\bar 1}, \varepsilon\in E\right)_{\bar\theta,\bar\tau} \to \left(L_{\bar q_\varepsilon}, \varepsilon\in E\right)_{\bar\theta,\bar\tau}.$$

Согласно соотношению (31) и теореме 1.1:

$$\left(HB^{\bar\alpha_\varepsilon}_{\bar r,\bar 1}, \varepsilon\in E\right)_{\bar\theta,\bar\tau} = HB^{\bar\alpha}_{\bar r,\bar\tau}, \qquad \left(L_{\bar q_\varepsilon}, \varepsilon\in E\right)_{\bar\theta,\bar\tau} = L_{\bar q,\bar\tau},$$

где $\frac{1}{\bar q}=\frac{1-\bar\theta}{\bar q_0}+\frac{\bar\theta}{\bar q_1}$, $\bar\alpha=(1-\bar\theta)\bar\alpha_0+\bar\theta\bar\alpha_1=\frac{1}{\bar r}-\frac{1}{\bar q}$.

Тем самым, неравенство (32) доказано.

4.2 Дискретные сетевые пространства и неравенство типа Никольского для частичных сумм ряда Фурье-Хаара

Пусть W_1, W_2 - некоторые фиксированные семейства конечных множеств из $\mathbb{Z}$. Семейство $W = W_1 \times W_2$ назовем сетью в $\mathbb{Z}^2$. Определим дискретные сетевые пространства $n_{\bar{r},\bar{\tau}}(W, L_{\bar{q}})$, $0 < \bar{r} < \infty$, $0 < \bar{\tau}, \bar{q} \leq \infty$ как множество последовательностей комплексных чисел $a = \{a_{k_1,k_2}\}_{k \in \mathbb{Z}^2}$, для которых конечна норма

$$\|a\|_{n_{\bar{r},\bar{\tau}}(W,L_{\bar{q}})} = \left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(k_1^{\frac{1}{r_1}}k_2^{\frac{1}{r_2}}\bar{a}_{k_1,k_2}(W)\right)^{\tau_1}\frac{1}{k_1}\right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\frac{1}{k_2}\right)^{\frac{1}{\tau_2}} < \infty,$$

здесь

$$\bar{a}_{k_1,k_2}(W) = \sup_{\substack{|e_i| \geq k_i \\ e_i \in W_i}} \frac{1}{|e_1||e_2|}\left\|\sum_{m_1 \in e_1}\sum_{m_2 \in e_2} a_{m_1,m_2}\chi_{m_1}(x_1)\chi_{m_2}(x_2)\right\|_{L_{\bar{q}}}.$$

Данные пространства являются аналогами дискретных пространств, рассмотренных в работе Е.Д. Нурсултанова [44, с. 99] и обладают аналогичными свойствами:

1. При $0 < \bar{\tau} \leq \bar{\tau}_1 \leq \infty$, $n_{\bar{r},\bar{\tau}}(W, L_{\bar{q}}) \hookrightarrow n_{\bar{r},\bar{\tau}_1}(W, L_{\bar{q}})$.
2. При $0 < \bar{r} \leq \bar{r}_1 < \infty$, $n_{\bar{r},\bar{\tau}}(W, L_{\bar{q}}) \hookrightarrow n_{\bar{r}_1,\bar{\tau}}(W, L_{\bar{q}})$.
3. $\left(n_{\bar{r}_\varepsilon,\bar{\tau}_\varepsilon}(W, L_{\bar{q}}), \varepsilon \in E\right)_{\bar{\theta},\bar{\tau}} \hookrightarrow n_{\bar{r},\bar{\tau}}(W, L_{\bar{q}})$, где $\frac{1}{\bar{r}} = \frac{1-\bar{\theta}}{\bar{r}_0} + \frac{\bar{\theta}}{\bar{r}_1}$.
4. $\|a\|_{n_{\bar{r},\bar{\tau}}(W,L_{\bar{q}})} = \left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{\frac{k_1}{r_1}+\frac{k_2}{r_2}}\bar{a}_{k_1,k_2}(W)\right)^{\tau_1}\right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right)^{\frac{1}{\tau_2}}$.

Нам понадобится неравенство типа Никольского для двойных рядов Фурье по системе Хаара.

Теорема 4.2. *Пусть* $1 < \bar{p} < \bar{q} \leq \infty$, $0 < \bar{\tau} \leq \infty$, $\frac{1}{\bar{r}} = 1 - \frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{q}}$, W *- множество всех прямоугольников из* $\mathbb{N}^2$ *вида* $[1, m_1] \times [1, m_2]$. *Если функция* f *из* $L_{\bar{p},\bar{\tau}}$ *с рядом Фурье-Хаара* $\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}\hat{f}(m_1, m_2)\chi_{m_1}(x_1)\,\chi_{m_2}(x_2)$, *тогда* $\hat{f} = \{\hat{f}_{m_1 m_2}\}_{m_i \in \mathbb{N}} \in n_{\bar{r},\bar{\tau}}(W, L_{\bar{q}})$ *и верно неравенство:*

$$\|\hat{f}\|_{n_{\bar{r},\bar{\tau}}(W,L_{\bar{q}})} \leq c\|f\|_{L_{\bar{p},\bar{\tau}}}$$

где c *зависит только от параметров* $\bar{p}, \bar{q}, \bar{\tau}$.

Доказательство. Определим оператор $Tf = \{\hat{f}_m\}_{m \in \mathbb{N}^2}$. Из леммы 4.1 следует, что:

$$\|Tf\|_{n_{\bar r,\bar\tau}(W,L_{\bar q})} =$$

$$\sup_{k_i\in\mathbb{N}} k_1^{\frac{1}{r_1}} k_2^{\frac{1}{r_2}} \sup_{\substack{|e_i|\geq k_i\\ e_1\times e_2\in W}} \frac{1}{|e_1||e_2|}\left\|\sum_{m_2\in e_2}\sum_{m_1\in e_1}\hat f(m_1,m_2)\chi_{m_1}(x_1)\chi_{m_2}(x_2)\right\|_{L_{\bar q}} =$$

$$\sup_{k_i\in\mathbb{N}} k_1^{\frac{1}{r_1}} k_2^{\frac{1}{r_2}} \sup_{m_i\geq k_i}\frac{1}{m_1m_2}\left\|S_{m_1m_2}(f)\right\|_{L_{\bar q}} \leq$$

$$4\cdot\sup_{k_i\in\mathbb{N}} k_1^{\frac{1}{r_1}} k_2^{\frac{1}{r_2}} \sup_{m_i\geq k_i}\frac{1}{m_1m_2} m_1^{\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)} m_2^{\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)}\|f\|_{L_{\bar p}} = 4\|f\|_{L_{\bar p}} \tag{34}$$

Пусть векторы $\bar p_0,\bar r_0,\bar p_1,\bar r_1$ удовлетворяют условиям $1<\bar p_0<\bar p<\bar p_1\leq\infty$, $\frac{1}{\bar r_0}=1-\frac{1}{\bar p_0}+\frac{1}{\bar q}$, $\frac{1}{\bar r_1}=1-\frac{1}{\bar p_1}+\frac{1}{\bar q}$. Пусть $\bar p_\varepsilon=\left(p_1^{\varepsilon_1},p_2^{\varepsilon_2}\right),\bar r_\varepsilon=\left(r_1^{\varepsilon_1},r_2^{\varepsilon_2}\right)$, где $\varepsilon\in E=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. Тогда для оператора T из неравенства (34) следует

$$T: L_{\left(p_1^{\varepsilon_1},p_2^{\varepsilon_2}\right)}\to n_{\left(r_1^{\varepsilon_1},r_2^{\varepsilon_2}\right),\bar\infty}\left(W,L_{\bar q}\right),$$

для любого $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in E$. Следовательно для данного оператора имеем

$$T:\left(L_{\bar p_\varepsilon},\varepsilon\in E\right)_{\bar\theta,\bar\tau}\to\left(n_{\bar r_\varepsilon,\bar\infty}\left(W,L_{\bar q}\right),\varepsilon\in E\right)_{\bar\theta,\bar\tau},$$

где $\frac{1}{\bar p}=\frac{1-\bar\theta}{\bar p_0}+\frac{\bar\theta}{\bar p_1}$, $\frac{1}{\bar r}=\frac{1-\bar\theta}{\bar r_0}+\frac{\bar\theta}{\bar r_1}$.

Согласно теореме 1.1 и в силу свойства 3° пространств $n_{\bar r,\bar\tau}\left(W,L_{\bar q}\right)$ получим

$$T: L_{\bar p,\bar\tau}\to n_{\bar r,\bar\tau}\left(W,L_{\bar q}\right).$$

Таким образом, мы показали, что оператор Tf ограничен из $L_{\bar p,\bar\tau}$ в $n_{\bar r,\bar\tau}\left(W,L_{\bar q}\right)$, следовательно имеет место неравенство

$$\left\|\hat f\right\|_{n_{\bar r,\bar\tau}(W,L_{\bar q})}\leq c\|f\|_{L_{\bar p,\bar\tau}}.$$

Теорема доказана.

Следствие 4.1. *Пусть* $1<\bar p<\bar q<\infty$, $0<\bar\tau\leq\infty$. *Если* $f\in L_{\bar p,\bar\tau}[0,1]^2$, *тогда имеют место следующее соотношение*

$$\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{k_1\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{q_2}-\frac{1}{p_2}\right)}\left\|S_{2^{k_1}2^{k_2}}(f)\right\|_{L_{\bar q}}\right)^{\tau_1}\right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\right)^{\frac{1}{\tau_2}}\leq c\|f\|_{L_{\bar p,\bar\tau}}, \tag{35}$$

в частности

$$\left\|S_{m_1 m_2}(f)\right\|_{L_{\bar{q}}} = o\left(m_1^{\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)} m_2^{\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)}\right) \tag{36}$$

при $m_1 + m_2 \to \infty$

Доказательство. Покажем, что

$$m_1^{\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)} m_2^{\left(\frac{1}{q_2}-\frac{1}{p_2}\right)} S_{m_1 m_2} \to 0 \text{ при } m_1 + m_2 \to \infty.$$

Поскольку $f \in L_{\bar{p},\bar{\tau}}[0,1]^2$, то из теоремы 4.2 имеем

$$\left(\sum_{k_2=1}^{\infty}\left(\sum_{k_1=1}^{\infty}\left(k_1^{1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}} k_2^{1-\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}} \bar{a}_{k_1,k_2}(W, L_{\bar{q}})\right)^{\tau_1} \frac{1}{k_1}\right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \frac{1}{k_2}\right)^{\frac{1}{\tau_2}} < \infty.$$

Тогда

$$I_{n_1 n_2} = \left(\sum_{k_2=\left[\frac{n_2}{2}\right]}^{n_2}\left(\sum_{k_1=\left[\frac{n_1}{2}\right]}^{n_1}\left(k_1^{1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}} k_2^{1-\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}} \bar{a}_{k_1,k_2}(W, L_{\bar{q}})\right)^{\tau_1} \frac{1}{k_1}\right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \frac{1}{k_2}\right)^{\frac{1}{\tau_2}} \to 0$$

при $n_1 + n_2 \to \infty$.

Учитывая монотонность последовательности $\left\{\bar{a}_{k_1,k_2}(W, L_{\bar{q}})\right\}$

$$\begin{aligned}
I_{n_1 n_2} &\geq \bar{a}_{n_1 n_2}(W, L_{\bar{q}}) \left[\frac{n_1}{2}\right]^{1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}} \left[\frac{n_2}{2}\right]^{1-\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}} \left(\sum_{m_2=\left[\frac{n_2}{2}\right]}^{n_2} \frac{1}{m_2}\right)^{\frac{1}{\tau_2}} \left(\sum_{m_1=\left[\frac{n_1}{2}\right]}^{n_1} \frac{1}{m_1}\right)^{\frac{1}{\tau_1}} \\
&\asymp \bar{a}_{n_1 n_2}(W, L_{\bar{q}}) n_1^{1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}} n_2^{1-\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}} \\
&= \sup_{m_i \geq n_i} \frac{1}{m_1 m_2} \left\|S_{m_1 m_2}(f)\right\|_{L_{\bar{q}}} n_1^{1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}} n_2^{1-\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}} \\
&\geq n_1^{\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}} n_2^{\frac{1}{q_2}-\frac{1}{p_2}} \left\|S_{n_1 n_2}(f)\right\|_{L_{\bar{q}}}.
\end{aligned}$$

Следовательно, верно соотношение (36).

Доказательство соотношения (35) следует из свойства 4^{o} пространств $n_{\bar{r},\bar{\tau}}(W, L_{\bar{q}})$ и теоремы 4.2.

4.3 Теорема о мультипликаторах двойных рядов Фурье-Хаара функций из анизотропных пространств Лоренца

Лемма 4.3. *Пусть* $1 < \bar{h}, \bar{r}, \bar{q} < \infty$ *и* $\frac{1}{q_i} = \left(\frac{1}{h_i} - \frac{1}{r_i}\right)_+ = \max\left\{\frac{1}{h_i} - \frac{1}{r_i}, 0\right\}$, $i = 1,2$. *Тогда верно*

$$\|a\|_{l_{\bar{q}}} = \sup_{\{b_{k_1k_2}\}} \frac{\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|a_{k_1k_2}b_{k_1k_2}\right|^{h_1}\right)^{\frac{h_2}{h_1}}\right)^{\frac{1}{h_2}}}{\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|b_{k_1k_2}\right|^{r_1}\right)^{\frac{r_2}{r_1}}\right)^{\frac{1}{r_2}}}.$$

Доказательство. Докажем неравенство

$$\sup_{\{b_{k_1k_2}\}} \frac{\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|a_{k_1k_2}b_{k_1k_2}\right|^{h_1}\right)^{\frac{h_2}{h_1}}\right)^{\frac{1}{h_2}}}{\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|b_{k_1k_2}\right|^{r_1}\right)^{\frac{r_2}{r_1}}\right)^{\frac{1}{r_2}}} \geq \|a\|_{l_{\bar{q}}}. \qquad (37)$$

Определим последовательность $b^1 = \left\{b^1_{k_1k_2}\right\}$ следующим образом. Если $h_1 < r_1$, то

$$b^1_{k_1k_2} = \frac{\left|a_{k_1k_2}\right|^{\frac{q_1}{r_1}}}{\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|a_{k_1k_2}\right|^{q_1}\right)^{\frac{1}{r_1}}}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{N}$$

Пусть $h_1 \geq r_1$, $\varepsilon > 0$. Из определения точной верхней грани следует, что найдется $j_{k_2} \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sup_{k_1\in\mathbb{N}}\left|a_{k_1k_2}\right| \leq (1+\varepsilon)\left|a_{j_{k_2}k_2}\right|.$$

В этом случае $b^1 = \left\{b^1_{k_1k_2}\right\}$ определим следующим образом

$$b^1_{k_1k_2} = \begin{cases} 1, & k_1 = j_{k_2}, \\ 0, & k_1 \neq j_{k_2}. \end{cases}$$

Определим теперь $\left\{b_{k_2}^2\right\}_{k_2=0}^{\infty}$. Если $h_2 < r_2$, то

$$b_{k_2}^2 = \frac{\left(\left\|a_{(\cdot)k_2}\right\|_{l_{q_1}}\right)^{\frac{q_2}{r_2}}}{\left(\|a\|_{l_{\bar{q}}}\right)^{\frac{q_2}{r_2}}}.$$

Пусть $h_2 \geq r_2$ и j такое, что

$$(1+\varepsilon)\left\|a_{(\cdot)j}\right\|_{l_{q_1}} \geq \sup_{k_2 \in \mathbb{N}} \left\|a_{(\cdot)k_2}\right\|_{l_{q_1}},$$

тогда

$$b_{k_2}^2 = \begin{cases} 1, & k_2 = j, \\ 0, & k_2 \neq j. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь последовательность $b = \left\{b_{k_1 k_2}\right\} = \left\{b_{k_2}^2 b_{k_1 k_2}^1\right\}$. Тогда $\|b\|_{l_{\bar{r}}} = 1$ и

$$\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|a_{k_1 k_2} b_{k_1 k_2}\right|^{h_1}\right)^{\frac{h_2}{h_1}}\right)^{\frac{1}{h_2}} \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\|a\|_{l_{\bar{q}}}.$$

В силу произвольности ε получим

$$\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|a_{k_1 k_2} b_{k_1 k_2}\right|^{h_1}\right)^{\frac{h_2}{h_1}}\right)^{\frac{1}{h_2}} \geq \|a\|_{l_{\bar{q}}}.$$

И следовательно, верно неравенство (37).

Для доказательства обратного неравенства введем обозначения $\tilde{h}_1 = \min(h_1, r_1)$, $\tilde{h}_2 = \min(h_2, r_2)$. Далее учитывая, что $\tilde{h}_i \leq h_i$, $i = 1, 2$ используем неравенство Йенсена:

$$\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|a_{k_1k_2}b_{k_1k_2}\right|^{h_1}\right)^{\frac{h_2}{h_1}}\right)^{\frac{1}{h_2}} \leq \left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|a_{k_1k_2}b_{k_1k_2}\right|^{\tilde{h}_1}\right)^{\frac{\tilde{h}_2}{\tilde{h}_1}}\right)^{\frac{1}{\tilde{h}_2}}.$$

Далее применим неравенство Гельдера

$$\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|a_{k_1k_2}b_{k_1k_2}\right|^{\tilde{h}_1}\right)^{\frac{\tilde{h}_2}{\tilde{h}_1}}\right)^{\frac{1}{\tilde{h}_2}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|a_{k_1k_2}\right|^{q_1}\right)^{\frac{q_2}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}} \left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|b_{k_1k_2}\right|^{r_1}\right)^{\frac{r_2}{r_1}}\right)^{\frac{1}{r_2}}.$$

Тем самым получим

$$\frac{\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|a_{k_1k_2}b_{k_1k_2}\right|^{h_1}\right)^{\frac{h_2}{h_1}}\right)^{\frac{1}{h_2}}}{\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|b_{k_1k_2}\right|^{r_1}\right)^{\frac{r_2}{r_1}}\right)^{\frac{1}{r_2}}} \leq \|a\|_{l_{\bar{q}}}.$$

Лемма 4.3 доказана.

Теорема 4.3. *Пусть* $1 < \bar{p} < \bar{q} < \infty$, $0 < \bar{r}, \bar{s} \leq \infty$, $\frac{1}{\xi_i} = \left(\frac{1}{s_i} - \frac{1}{r_i}\right)_+ = max\left\{\frac{1}{s_i} - \frac{1}{r_i}, 0\right\}$, $i = 1, 2$. *Тогда последовательность комплексных чисел* $\lambda = \left\{\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right\}_{(k_i,j_i)\in\Omega}$ *является мультипликатором из* $L_{\bar{p},\bar{r}}[0,1]^2$ *в* $L_{\bar{q},\bar{s}}[0,1]^2$ *тогда и только тогда, когда*

$$\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{k_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)} \sup_{\substack{1\leq j_i\leq 2^{k_i}\\ i=1,2}}\left|\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right|\right)^{\xi_1}\right)^{\frac{\xi_2}{\xi_1}}\right)^{\frac{1}{\xi_2}} < \infty$$

и верно

$$\|\lambda\|_{m\left(L_{\overline{p},\overline{r}}[0,1]^2\to\ L_{\overline{q},\overline{s}}[0,1]^2\right)} \asymp \left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{k_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)}\sup_{\substack{1\le j_i\le 2^{k_i}\\ i=1,2}}\left|\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right|\right)^{\xi_1}\right)^{\frac{\xi_2}{\xi_1}}\right)^{\frac{1}{\xi_2}}.$$

Здесь и далее в случае, когда $\xi_i=+\infty$, соответствующая сумма в выражении справа заменяется на супремум.

Доказательство. Пусть последовательность комплексных чисел $\lambda=\left\{\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right\}_{(k_i,j_i)\in\Omega}$ такая, что

$$\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{k_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)}\sup_{\substack{1\le j_i\le 2^{k_i}\\ i=1,2}}\left|\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right|\right)^{\xi_1}\right)^{\frac{\xi_2}{\xi_1}}\right)^{\frac{1}{\xi_2}} \le K,$$

где $\frac{1}{\xi_i}=\left(\frac{1}{s_i}-\frac{1}{r_i}\right)_+$.

Пусть $f\in L_{\bar{p},\bar{r}}[0,1]^2$. Найдется такой $\bar{t}$, что $\bar{p}<\bar{t}<\bar{q}$. Применив соотношение (32) и лемму 2.1 получим:

$$\|f_\lambda\|_{L_{\overline{q},\overline{s}}} \lesssim \left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{k_1\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{q_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{q_2}\right)}\left\|\Delta_{k_1k_2}(f_\lambda)\right\|_{L_{\bar{t}}}\right)^{s_1}\right)^{\frac{s_2}{s_1}}\right)^{\frac{1}{s_2}} \le$$

$$\le\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{k_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_2}\right)}\sup_{\substack{1\le j_i\le 2^{k_i}\\ i=1,2}}\left|\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right|\left(\sum_{j_2=1}^{2^{k_2}}\left(\sum_{j_1=1}^{2^{k_1}}\left|a_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right|^{t_1}\right)^{\frac{t_2}{t_1}}\right)^{\frac{1}{t_2}}\right)^{s_1}\right)^{\frac{s_2}{s_1}}\right)^{\frac{1}{s_2}}$$

$$= \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \left(2^{k_1\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{q_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{q_2}\right)} \sup_{\substack{1\le j_i\le 2^{k_i}\\ i=1,2}} \left|\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right| \left\|\Delta_{k_1k_2}(f)\right\|_{L_{\bar{t}}} \right)^{s_1} \right)^{\frac{s_2}{s_1}} \right)^{\frac{1}{s_2}}.$$

Пусть $\nu_i = max(s_i, r_i)$, $i = 1, 2$. Тогда учитывая равенство $\frac{1}{\xi_i} = \left(\frac{1}{s_i} - \frac{1}{r_i}\right)_+$ имеем $\frac{1}{s_i} = \frac{1}{\nu_i} - \frac{1}{\xi_i}$, $i = 1, 2$. Применим неравенство Гёльдера и соотношение (35) (см. следствие 4.1)

$$\|f_\lambda\|_{L_{\bar{q},\bar{s}}} \le \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \left(2^{k_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)} \sup_{\substack{1\le j_i\le 2^{k_i}\\ i=1,2}} \left|\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right| \right)^{\xi_1} \right)^{\frac{\xi_2}{\xi_1}} \right)^{\frac{1}{\xi_2}} \times$$

$$\times \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \left(2^{k_1\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{p_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{p_2}\right)} \left\|\Delta_{k_1k_2}(f)\right\|_{L_{\bar{t}}} \right)^{\nu_1} \right)^{\frac{\nu_2}{\nu_1}} \right)^{\frac{1}{\nu_2}} \le K\|f\|_{L_{\bar{p},\bar{\nu}}},$$

Так как $r_i \le \nu_i$, следовательно верно $\|f_\lambda\|_{L_{\bar{q},\bar{s}}} \le c\|f\|_{L_{\bar{p},\bar{r}}}$.

Таким образом, $\lambda \in m\left(L_{\bar{p},\bar{r}} \to L_{\bar{q},\bar{s}}\right)$ и $\|\lambda\|_{m\left(L_{\bar{p},\bar{r}} \to L_{\bar{q},\bar{s}}\right)} \le K$.

Пусть теперь $\lambda = \left\{\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right\}_{(k_i,j_i)\in\Omega}$ является мультипликатором из пространства $L_{\bar{p},\bar{r}}[0,1]^2$ в $L_{\bar{q},\bar{s}}[0,1]^2$. Пусть $f \in L_{\bar{p},\bar{r}}[0,1]^2$, $f \sim \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=1}^{2^{k_2}} \sum_{j_1=1}^{2^{k_1}} a_{k_1k_2}^{j_1j_2}(f)\chi_{k_1}^{j_1}(x_1)\chi_{k_2}^{j_2}(x_2)$. Согласно теореме 2.2 имеем:

$$\|f_\lambda\|_{N_{\bar{q},\bar{s}}(M)} \asymp \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \left(2^{k_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_2}\right)} \sup_{\substack{1\le j_i\le 2^{k_i}\\ i=1,2}} \left|a_{k_1k_2}^{j_1j_2}\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right| \right)^{s_1} \right)^{\frac{s_2}{s_1}} \right)^{\frac{1}{s_2}},$$

где M - множество прямоугольников из $[0,1]^2$. Учитывая, что $L_{\bar{q},\bar{s}}[0,1]^2 \hookrightarrow N_{\bar{q},\bar{s}}(M)$ (см. теорему 1.2), получим:

$$\|f_\lambda\|_{L_{\bar{q},\bar{s}}} \gtrsim \left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{k_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_2}\right)}\sup_{\substack{1\le j_i\le 2^{k_i}\\ i=1,2}}\left|a_{k_1k_2}^{j_1j_2}\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right|\right)^{s_1}\right)^{\frac{s_2}{s_1}}\right)^{\frac{1}{s_2}}.$$

С другой стороны, из леммы 4.2 и леммы 2.1 для $1<\bar{h}<\bar{p}$ имеем

$$\|f\|_{L_{\bar{p},\bar{r}}} \lesssim \left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{k_1\left(\frac{1}{h_1}-\frac{1}{p_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{h_2}-\frac{1}{p_2}\right)}\left\|\Delta_{k_1k_2}(f)\right\|_{L_{\bar{h}}}\right)^{r_1}\right)^{\frac{r_2}{r_1}}\right)^{\frac{1}{r_2}} =$$

$$= \left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{k_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}\right)}\left(\sum_{j_2=1}^{2^{k_2}}\left(\sum_{j_1=1}^{2^{k_1}}\left|a_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right|^{h_1}\right)^{\frac{h_2}{h_1}}\right)^{\frac{1}{h_2}}\right)^{r_1}\right)^{\frac{r_2}{r_1}}\right)^{\frac{1}{r_2}}.$$

Таким образом, получим:

$$\|\lambda\|_{m(L_{\bar{p},\bar{r}}\to L_{\bar{q},\bar{s}})} = \sup_{f\neq 0}\frac{\|f_\lambda\|_{L_{\bar{q},\bar{s}}}}{\|f\|_{L_{\bar{p},\bar{r}}}} \gtrsim$$

$$\gtrsim \sup_{\left\{a_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right\}}\frac{\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{k_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_2}\right)}\sup_{\substack{1\le j_i\le 2^{k_i}\\ i=1,2}}\left|a_{k_1k_2}^{j_1j_2}\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right|\right)^{s_1}\right)^{\frac{s_2}{s_1}}\right)^{\frac{1}{s_2}}}{\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{k_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p_2}\right)}\left(\sum_{j_2=1}^{2^{k_2}}\left(\sum_{j_1=1}^{2^{k_1}}\left|a_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right|^{h_1}\right)^{\frac{h_2}{h_1}}\right)^{\frac{1}{h_2}}\right)^{r_1}\right)^{\frac{r_2}{r_1}}\right)^{\frac{1}{r_2}}} \tag{38}$$

Для $(k_1,k_2)\in\mathbb{N}^2$ найдется $\left(j_{k_1},j_{k_2}\right)$, где $1\le j_{k_1}\le 2^{k_1}$, $1\le j_{k_2}\le 2^{k_2}$, что имеет место:

$$\left|\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right| = \max_{\substack{1\le j_i\le 2^{k_i}\\ i=1,2}}\left|\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right|.$$

Пусть $\{b_{k_1k_2}\}_{k_i\in\mathbb{Z}_+}$ - произвольная последовательность чисел. Рассмотрим последовательность $a=\left\{a_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right\}_{(k_i,j_i)\in\Omega}$ следующего вида

$$a_{k_1k_2}^{j_1j_2}=\begin{cases} b_{k_1k_2}, & j_1=j_{k_1}, \quad j_2=j_{k_2} \\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}, \qquad (k_1,k_2)\in\mathbb{N}^2$$

Тогда из (38), учитывая произвольность выбора последовательности $\{b_{k_1k_2}\}_{k_i=0}^{\infty}$, имеем:

$$\|\lambda\|_{m(L_{\bar{p},\bar{r}}\to L_{\bar{q},\bar{s}})}\gtrsim$$

$$\gtrsim\sup_{\{b_{k_1k_2}\}}\frac{\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{k_1\left(\frac12-\frac1{p_1}\right)+k_2\left(\frac12-\frac1{p_2}\right)}|b_{k_1k_2}|2^{k_1\left(\frac1{p_1}-\frac1{q_1}\right)+k_2\left(\frac1{p_2}-\frac1{q_2}\right)}\sup\limits_{\substack{1\le j_i\le 2^{k_i}\\ i=1,2}}\left|\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right|\right)^{s_1}\right)^{\frac{s_2}{s_1}}\right)^{\frac1{s_2}}}{\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{k_1\left(\frac12-\frac1{p_1}\right)+k_2\left(\frac12-\frac1{p_2}\right)}|b_{k_1k_2}|\right)^{r_1}\right)^{\frac{r_2}{r_1}}\right)^{\frac1{r_2}}}$$

$$=\sup_{\{d_{k_1k_2}\}}\frac{\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{k_1\left(\frac1{p_1}-\frac1{q_1}\right)+k_2\left(\frac1{p_2}-\frac1{q_2}\right)}\sup\limits_{\substack{1\le j_i\le 2^{k_i}\\ i=1,2}}\left|\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right|\left|d_{k_1k_2}\right|\right)^{s_1}\right)^{\frac{s_2}{s_1}}\right)^{\frac1{s_2}}}{\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left|d_{k_1k_2}\right|^{r_1}\right)^{\frac{r_2}{r_1}}\right)^{\frac1{r_2}}}=$$

$$=\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{k_1\left(\frac1{p_1}-\frac1{q_1}\right)+k_2\left(\frac1{p_2}-\frac1{q_2}\right)}\sup_{\substack{1\le j_i\le 2^{k_i}\\ i=1,2}}\left|\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right|\right)^{\xi_1}\right)^{\frac{\xi_2}{\xi_1}}\right)^{\frac1{\xi_2}}.$$

В последнем равенстве применили лемму 4.3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одним из важных направлений теории рядов Фурье по системе Хаара является изучение мультипликаторов рядов Фурье-Хаара. Именно данные теории позволяют решать множество сложнейших задач в разных отраслях науки. С помощью данной теории в современной математике осуществляется получение различных математических оценок. Совокупность представленных результатов диссертации позволяют сформулировать следующие **выводы**:

1. Доказана интерполяционная теорема для анизотропных сетевых пространств. Показано, что шкала анизотропных пространств $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ замкнута относительно многомерного интерполяционного метода, здесь M - множество всех прямоугольников в $\mathbb{R}^2$.

2. В терминах коэффициентов рядов Фурье-Хаара получен критерий принадлежности функции $f(x_1;\ x_2)$ сетевому пространству $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ и пространству Лебега $L_{\bar{p}}[0,1]^2$ со смешанной метрикой. Для сетевых пространств $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ имеет место критерий в терминах коэффициентов Фурье-Хаара без каких-либо дополнительных условий на функцию, либо на ее коэффициенты Фурье-Хаара. Следовательно, можно сказать, что для сетевых пространств $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ имеет место аналог равенства Парсеваля для всех $1 < \bar{p} < \infty$.

3. Получены необходимые и достаточные условия принадлежности последовательности $\lambda = \{\lambda_k^j\}_{k=0,j=1}^{\infty,2^k}$ классу мультипликаторов рядов Фурье-Хаара $m(L_{p,r} \to L_{q,s})$.

4. Получено неравенство типа Никольского для кратных рядов Фурье-Хаара. В частности, получено, что $\left\|S_{2^{k_1}2^{k_2}}(f)\right\|_{L_{\bar{q}}} = o\left(2^{k_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)}2^{k_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)}\right)$ для $f \in L_{\bar{p},\bar{\tau}}[0,1]^2$.

5. Получены необходимые и достаточные условия принадлежности последовательности $\lambda = \left\{\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right\}$ классу мультипликаторов кратных рядов Фурье-Хаара $m\left(L_{\bar{p},\bar{r}}[0,1]^2 \to L_{\bar{q},\bar{s}}[0,1]^2\right)$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Zygmund A. Trigonometric series. – Cambridge: Cambridge University Press, 1959. – Vol. 2. – 354 p.

2 Marcinkiewicz J. Sur les multiplicateurs des series de Fourier // Studia Math. – 1939. – Vol. 8. – P. 78-91.

3 Лизоркин П.И. О мультипликаторах интегралов Фурье в пространствах $L_{p,\theta}$ // Тр. МИАН СССР. – 1967. – Т. 89. – С. 231-248.

4 Лизоркин П.И. К теории мультипликаторов Фурье // Тр. МИАН СССР. – 1986. – Т. 173. – С. 149-163.

5 Нурсултанов Е.Д. О мультипликаторах рядов Фурье по тригонометрической системе // Матем. заметки. – 1998. – Т. 63, №2. – С. 235-247.

6 Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т. О мультипликаторах кратных рядов Фурье // Тр. МИАН. – 1999. – Т. 227. – С. 237-242.

7 Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т. Нижние и верхние оценки нормы мультипликаторов кратных тригонометрических рядов Фурье в пространствах Лебега // Функц. анализ и его прил. – 2000. – Т. 34, №2. – С. 86-88.

8 Smailov E.S., Tleukhanova N.T. Estimation of error of cubature formula in Besov space // Eurasian Math. J. – 2010. – Vol. 1, №1. – P. 147-156.

9 Юдин В.А. Сферические суммы рядов Фурье в L_p // Мат. заметки. – 1989. – Т. 46, №2. – С. 145-146.

10 Кашин Б.С., Саакян А.Л. Ортогональные ряды. – М.: Наука, 1984. – 496 с.

11 Burkholder D.L. A nonlinear partial differential equation and unconditional constant of the Haar system in L_p // Bull. Amer. Math. Soc. – 1982. – Vol. 7. – P. 591-595.

12 Yano S. On a lemma of Marcinkiewicz and its applications to Fourier series // Tohoku Math. J. – 1959. – Vol. 11. – P. 195-215.

13 Novikov I., Semenov E. Haar series and linear operators. – Dordrecht: Cluver Acad. Publ. – 1997. – 218 p.

14 Кротов В.Г. О безусловной сходимости рядов Хаара в Λ_ω^p // Мат. заметки. – 1978. – Т. 23, №5. – С. 685-695.

15 Брыскин И.Б., Лелонд О.В., Семенов Е.М. Мультипликаторы рядов Фурье – Хаара // Сиб. мат. журнал. – 2000. – Т. 41, №4. – С. 758-766.

16 Girardi M., Operator-valued Fourier Haar multipliers // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – Vol. 325. – P. 1314-1326.

17 Лелонд О.В., Семенов Е.М., Уксусов С.Н. Пространство мультипликаторов Фурье-Хаара // Сиб. мат. журнал. – 2005. – Т. 46, №1. – С. 130-138.

18 Семенов Е.М., Уксусов С.Н. Мультипликаторы рядов по системе Хаара // Сиб. матем. журнал. – 2012. – Т. 53, №2. – С. 388-395.

19 Wark H.M. Operator-valued Fourier Haar multipliers on vector-valued L_1 spaces // J. Math. Anal. Appl. – 2017. – Vol. 450. – P. 1148-1156.

20 Bashirova A.N., Kalidolday A.H., Nursultanov E.D. Interpolation theorem for anisotropic net spaces // Russian Mathematics. – 2021. – Vol. 65, №8. – P. 1-12.

21 Баширова А.Н. Интерполяционная теорема для анизотропных сетевых пространств // Ломоносов-2019: матер. 15-й междунар. науч. конф. студентов, магистрантов и молодых ученых. – Нур-Султан, 2019. – С. 16-17.

22 Баширова А.Н., Нурсултанов Е.Д. Интерполяционная теорема для сетевых пространств // День работников науки Республики Казахстан и Workshop «Problems of modelling processes in electrical contacts»: матер. традиц. междунар. апрельс. матем. конф., посв. 80-летнему С.Н. Харина. – Алматы, 2019. – С. 74.

23 Ульянов П.Л. О рядах по системе Хаара // Математ. сб. – 1964. – Т. 63(105), №3. – С. 356-391.

24 Нурсултанов Е.Д., Аубакиров Т.У. Теорема Харди–Литтлвуда для рядов Фурье–Хаара // Матем. заметки. – 2003. – Т. 73, №3. – С. 340-347.

25 Moricz F. On double cosine, sine and Walsh series with monotone coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. – 1990. – Vol. 109, №2. – P. 417-425.

26 Дьяченко М.И. О сходимости двойных тригонометрических рядов и рядов Фурье с монотонными коэффициентами // Матем. сб. – 1986. – Т. 129(171), №1. – С. 55-72.

27 Дьяченко М.И. Кусочно-монотонные функции многих переменных и теорема Харди-Литтлвуда // Известия АН СССР. – 1991. – Т. 55, №6. – С. 1156-1170.

28 Bashirova A.N., Nursultanov E.D. The Hardy-Littlewood theorem for double Fourier-Haar series from mixed metric Lebesgue $L_{\bar{p}}[0,1]^2$ and net $N_{\bar{p},\bar{q}}(M)$ spaces // Analysis Math. – 2022. – Vol. 48, Issue 1. – P. 5-17.

29 Нурсултанов Е.Д., Баширова А.Н. Теорема Харди-Литтлвуда для кратных рядов Фурье-Хаара // Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры (EMJ-2019): матер. междунар. науч. конф. – Нур-Султан, 2019. – С. 52-53.

30 Тлеуханова Н.Т., Баширова А.Н. О мультипликаторах рядов Фурье по системе Хаара // Матем. заметки. – 2021. – Т. 109, №6. – С. 912-920.

31 Баширова А.Н. Теорема о мультипликаторах рядов Фурье по системе Хаара // Евразия – пространство сотрудничества, мира и согласия: матер. евраз. молод. форума, посв. 20-летнему юб. Казахстанского филиала МГУ имени М.В. Ломоносова. – Нур-Султан, 2021. – С. 17-18.

32 Баширова А.Н. О мультипликаторах рядов Фурье-Хаара // Дифференциальные уравнения и смежные вопросы: матер. междунар. конф., посв. И.Г. Петровскому – М., 2021. – С. 329-331.

33 Bashirova A.N., Nursultanov E.D. On the inequality of different metrics for multiple Fourier–Haar series // Eurasian Math. J. – 2021. – Vol. 12, №3. – P. 90-93.

34 Баширова А.Н. О неравенстве разных метрик для кратных рядов Фурье-Хаара // Ломоносов-2020: матер. 16-й междунар. науч. конф. студентов, магистрантов и молодых ученых. – Нур-Султан, 2020. – С. 19-20.

35 Tleukhanova N.T., Nursultanov E.D., Bashirova A.N. Multipliers of double Fourier–Haar series // Advances in Operator Theory. – 2021. – Vol. 6(3). – P. 58-1-58-22.

36 Баширова А.Н. Теорема о мультипликаторах двойных рядов Фурье-Хаара // День работников науки Республики Казахстан: матер. традиц. междунар. апрел. матем. конф., посв. 75-летию Т.Ш. Кальменова. – Алматы, 2021. – С. 17-18.

37 Баширова А.Н. Мультипликаторы кратных рядов Фурье-Хаара функций из анизотропных пространств Лоренца // Уфимская осенняя математическая школа-2020: матер. междунар. науч. конф. – Уфа, 2020. – С. 88-90.

38 Баширова А.Н. О мультипликаторах двойных рядов Фурье-Хаара // Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики: матер. междунар. науч.-практ. конф. – Нур-Султан, 2021. – С. 41-46.

39 Fernandez D.L. Lorentz spaces with mixed norms // J. Funct. Anal. – 1977. – Vol. 25, №2. – P. 128-146.

40 Fernandez D.L. Interpolation of 2^n Banach spaces // Stud. Math. (PRL). – 1979. – Vol. 65, №2. – P. 175-201.

41 Fernandez D.L. Interpolation of 2^n Banach space and the Calderon spaces // Proc. London Math. Soc. – 1988. – Vol. 56. – P. 143-162.

42 Bekmaganbetov K. A., Nursultanov E. D. Embedding theorems for anisotropic Besov spaces $B_{\overline{p},\overline{r}}^{\overline{\alpha},\overline{q}}([0,2\pi)^n)$ // Izv. Math. – 2009. – Vol. 73, Issue 4. – P. 655-668.

43 Нурсултанов Е.Д. Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения // Докл. РАН. – 2004. – Т. 394(1). – С. 1-4.

44 Нурсултанов Е.Д. О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p пространств // Известия РАН. – 2000. – №64(1). – С. 95-122.

45 Нурсултанов Е.Д. О применении интерполяционных методов к исследованию свойств функций многих переменных // Матем. заметки. – 2004. – №75(3). – С. 372-383.

46 Bekmaganbetov K., Nursultanov E.D. Interpolation of Besov $B_{p,\tau}^{\sigma,q}$ and Lizorkin-Triebel $F_{p,\tau}^{\sigma,q}$ spaces // Anal. Math. – 2009. – Vol. 35. – P. 169-188.

47 Нурсултанов Е.Д. Сетевые пространства и неравенства типа Харди–Литтлвуда // Матем. сб. – 1998. – №189(3). – С. 83-102.

48 Akylzhanov R., Nursultanov E., Ruzhansky M. Hardy-Littlewood-Paley inequalities and Fourier multipliers on $SU(2)$ // Studia Mathematica. – 2016. – Vol. 234, Issue 1. – P. 1-29.

49 Akylzhanov R., Ruzhansky M. Net spaces on lattices, Hardy-Littlewood type unequalities, and their converses // Eur. Math. Jour. – 2017. – Vol. 8, Issue 3. – P. 10-27.

50 Akylzhanov R., Ruzhansky M., Nursultanov E. Hardy-Littlewood, Hausdorff-Young-Paley inequalities, and $L_p \to L_q$ Fourier multipliers on compact homogeneous manifolds // Jour. of Math. Anal. and Appl. – 2019. – Vol. 479, Issue 2. – P. 1519-1548.

51 Nursultanov E., Tikhonov S. Net spaces and boundedness of integral operators // J. Geom. Anal. – 2011. – Vol. 21. – P. 950-981.

52 Nursultanov E., Sarybekova L., Tleukhanova N. Some new Fourier multiplier results of Lizorkin and Hormander types // Functional analysis in interdisciplinary applications: procced. sympos. – Cham: Springer, 2017. – P. 58-82.

53 Persson L-E., Sarybekova L., Tleukhanova N. A Lizorkin theorem on Fourier series multipliers for strong regular systems // In book: Analysis for science, engineering and beyond. – Heidelberg: Springer, 2012. – P. 305-317.

54 Sarybekova L.O., Tararykova T.V., Tleukhanova N.T. On a generalization of the Lizorkin theorem on Fourier multipliers // Math. Inequal. Appl. – 2010. – Vol. 13, №3. – P. 613-624.

55 Бекмаганбетов К.А. Теорема интерполяции для пространств $l_q^\sigma(L_{p,\tau})$, $L_{p,\tau}(l_q^\sigma)$ // Вестник Казахского национального университета. – 2008. – №1(56). – С. 30-42.

56 Dyachenko M., Nursultanov E., Tikhonov S. Hardy-type theorems on Fourier transforms revised // J. Math. Anal. Appl. – 2018. – Vol. 467. – P. 171-184.

57 Schauder J. Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonal systems // Math. Z. – 1928. – №28. – P. 317-320.

58 Нурсултанов Е.Д. Неравенство разных метрик С.М. Никольского и свойства последовательности норм сумм Фурье функции из пространства Лоренца // Тр. МИАН. – 2006. – Т. 255. – С. 197-215.

59 Голубов Б.И. Наилучшие приближения функций в метрике L_p полиномами Хаара и Уолша // Матем. сб. – 1972. – Т. 87(129), №2. – С. 254-274.

60 Берг Й., Лёфстрем Й. Интерполяционные пространства: введение / пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 264 с.

61 Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975. – 480 с.